Forelesning 24. januar 2024

Permutasjoner

$\sigma : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$
Bijektiv avbildning

Eksempler på skrivemåte

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$1 \mapsto 4$
$2 \mapsto 2$
$3 \mapsto 5$
$4 \mapsto 3$
$5 \mapsto 1$

$(1435)(2) = (1435)$

Thm 8.5 A ~~(endelig)~~ mengde

S_A: mengden av permutasjoner av A

$\sigma : A \longrightarrow A$
bijeksjon

S_A er en gruppe under komposisjon

Bevis
- lukket
- assosiativ (funksjoner)
- enhet
- inverser

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1435) \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13425)$$

$\sigma\tau$:

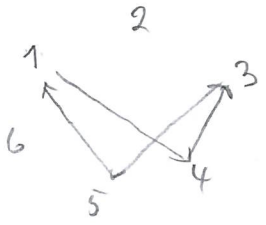
$1 \mapsto 3 \mapsto 5$
$2 \mapsto 5 \mapsto 1$
$3 \mapsto 4 \mapsto 3$
$4 \mapsto 2 \mapsto 2$
$5 \mapsto 1 \mapsto 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

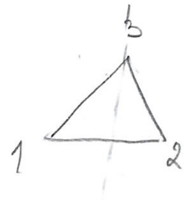
$= (1435)(13425) = (1542)(3) = (1542)$

Def 8.6 A endelig $|A| < \infty$

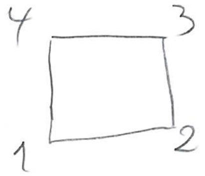
S_n: SYMMETRISK Gruppe på n elementer



(Gjennomløping av en bane)
Syklel (1435) (cycle)
Bane $\{1,4,3,5\}$ (orbit)
↖ (Alle elementer vi kan nå fra et gitt element vha σ)



ρ : rotasjon $\rho = (123)$
μ : refleksjon $\mu = (12)$
} Dihedral gruppe D_3
Symmetrisk –"– S_3

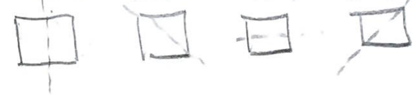


ρ : rotasjon $\rho = (1234)$
μ : refleksjon $\mu = (12)(34)$
} Dihedral gruppe D_4
$(\neq S_4)$

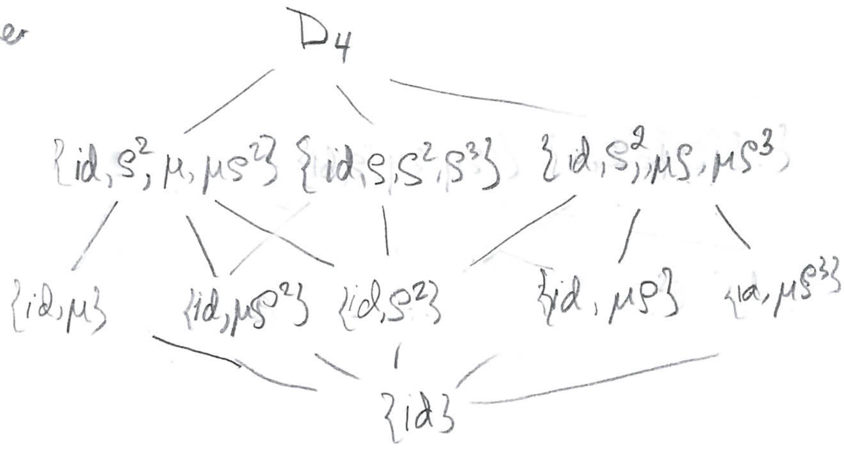
Eks. $(12), (123) \notin D_4$

$D_4 = \{id, \rho, \rho^2, \rho^3, \mu, \mu\rho, \mu\rho^2, \mu\rho^3\}$

$\rho = (1234)$, $\rho^2 = (13)(24)$, $\rho^3 = (1432)$, $\mu = (12)(34)$, $\mu\rho = (24)$, $\mu\rho^2 = (14)(23)$, $\mu\rho^3 = (13)$



Undergrupper



Thm 8.16 (Cayley)

Enhver gruppe G er isomorf med en permutasjonsgruppe

Bevis Definer avbildning

$$\varphi : G \longrightarrow S_G$$
$$g \longmapsto \sigma_g \quad \text{hvor } \sigma_g(h) = gh$$

1) $\varphi(gg') = \sigma_{gg'}$ $\sigma_{gg'}(h) = gg'h$.

$\varphi(g)\varphi(g') = \sigma_g \sigma_{g'}$ $\sigma_g \sigma_{g'}(h) = \sigma_g(g'h) = gg'h$.

2) $\sigma_g(g^{-1}h) = gg^{-1}h = h$ viser σ_g er surjektiv

$\sigma_g(h) = \sigma_g(h') \Rightarrow gh = gh' \Rightarrow h = h'$ viser σ_g injektiv

Hva skal vi med Cayleys teorem?

I mange tilfeller kan det være enklere å vise noe for en permutasjonsgruppe enn en generell gruppe.

Alternativ regnemåte:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$