Forelesning 29. januar 2024

Def. 0.18

En EKVIVALENSRELASJON $\mathcal{R}$ på en mengde S tilfredsstiller, $\forall x,y,z \in S$

i) Refleksivitet $x \mathcal{R} x$ (x er ekvivalent med seg selv)

ii) Symmetri $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$

iii) Transitivitet $x \mathcal{R} y, y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$

Eksempler:

1. Likhetstegn, kongruens etc
2. Samme side av en linje i planet.
3. $a \equiv b \pmod n$ betyr $n \mid b-a$
   - i) $n \mid a-a=0$
   - ii) $n \mid b-a \Rightarrow n \mid a-b=-a$
   - iii) $n \mid b-a, c-b \Rightarrow n \mid c-b+b-a = c-a$

Ekvivalensrelasjon $\rightsquigarrow$ Partisjon

$$S = \bigcup_i S_i, \quad S_i \cap S_j = \emptyset \quad i \neq j$$

Gitt $x_i \in S_i$; $S_i = \{x \in S \mid x \mathcal{R} x_i\}$

disjunkt pga ekvivalensrelasjon

$x \in S_i \cap S_j \neq \emptyset$; $x \mathcal{R} x_i, x \mathcal{R} x_j \Rightarrow S_i \subseteq S_j, S_j \subseteq S_i$.

Merk:

Endre ii) til $x \mathcal{R} y$ og $y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$

$\rightsquigarrow$ Partiell ordning: $\mathcal{R} : \leqslant$

i) $x \leqslant x$

ii) $x \leqslant y$ og $y \leqslant x \Rightarrow x = y$

iii) $x \leqslant y, y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$

A mengde $\quad \sigma : A \to A$ permutasjon (bijektiv avbildning)

Definer $a \sim b \overset{\text{def}}{\iff} \sigma^n(a) = b$ for en $n \in \mathbb{Z}$

Ekvivalensrelasjon

Bevis i) $a \sim a$ siden $\sigma^0(a) = a$

ii) $a \sim b$ betyr $\sigma^n(a) = b$
$\Rightarrow \sigma^{-n}(b) = a$

iii) $b = \sigma^n(a)$, $c = \sigma^m(b)$
$\Rightarrow c = \sigma^{n+m}(a)$

Ekvivalensklassene under $\sim$ kalles ORBITENE til σ

Ens. orbitene til:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\{1,3,6\}, \{2,8\}, \{4,5,7\}$$

Orbit $\longleftrightarrow$ sykel

Def 9.6

En permutasjon $\sigma \in S_n$ kalles en SYKEL hvis den kun har en orbit med mer enn ett element

$$(136)(28)(457)$$

Permutasjon på DISJUNKT SYKELFORM

$$\sigma = (136)(28)(457)$$

Thm 9.8

Enhver permutation σ kan skrives som et produkt av disjunkte sykler

Bevis $A = \bigcup_i S_i$ S_i orbit $S_i \cap S_j = \emptyset$

σ_i svarer til S_i

$\Rightarrow \sigma = \prod \sigma_i$ disjunkt.

Merk: Disjunkte sykler kommutere $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$.

Ens $(136)(26)(457) = (457)(136)(28)$
$= \text{ete.}$

Def 9.11 En sykel av lengde 2 kalles en TRANSPOSISJON

Eks (12), $(3,4)$, $(1,3)$ etc.

Merk: $(12345) = (15)(14)(13)(12)$

ikke disjunkt, ikke entydig

$= (15)(14)(45)(23)(12)(45)(13)(23)$

1	2	3	4	5
1	3	2	4	5
3	1	2	4	5
3	1	2	5	4
3	2	1	5	4
2	3	1	5	4
2	3	1	4	5
2	3	4	1	5

Kor 9.12 Enhver permutasjon kan skrives som et produkt av transposisjoner

Bevis $(a_1 a_2 \dots a_n) = (a_1 a_n)(a_1 a_{n-1}) \cdots (a_1 a_2)$

Thm 9.15 En permutasjon kan skrives som et odde antall transposisjoner eller (XOR) et jevnt (partall) antall men ikke begge deler

Dvs $\sigma = \prod_{i=1}^{m} \tau_i = \prod_{j=1}^{n} \sigma_j$ τ_i, σ_j transposisjoner

$\Rightarrow n \equiv m \pmod 2$

Bevis Identifiser σ med sin permutasjonsmatrise

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$$

dvs nøyaktig én 1-er i hver rad og hver søyle

$M_\sigma = \sum_{i=1}^{n} e_{i,\sigma(i)}$ $e_{i\sigma(i)}$: $n \times n$-matrise med 1 på plass $i,\sigma(i)$ 0 ellers.

$\Rightarrow \det(M_\sigma) = \pm 1$

E_{ij} : elementær matrise som svarer til å bytte rad i og j

$$E_{ij} = \sum_{k \neq i,j} e_{kk} + e_{ij} + e_{ji} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{23}$$

$$\Rightarrow \quad E_{ij} M_\sigma = M_{\sigma(ij)}$$

Bevis

$$\left(\sum_{k \neq i,j} e_{kk} + e_{ij} + e_{ji} \right) \sum_{l} e_{l,\sigma(l)}$$

$$= \sum_{k \neq i,j} e_{k\,\sigma(k)} + e_{i,\sigma(j)} + e_{j\,\sigma(i)}$$

Sammenlikn med

$$\big((\sigma(ij))\big)(k) = \begin{cases} \sigma(k) & k \neq i,j \\ \sigma(j) & k = i \\ \sigma(i) & k = j \end{cases}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} e_{k\,\sigma(ij)(k)}$$

Videre har vi $\det(E_{ij}) = -1$. Anta

$$\prod_{k=1}^{m} E_{i_k j_k} M_\sigma = id \quad \Rightarrow \det(id) = \det(M_\sigma)(-1)^m = 1$$

$$\Rightarrow \quad \det(M_\sigma) = (-1)^m$$

Def 9.18 Permutasjon σ er jevn $\Leftrightarrow \det(M_\sigma) = 1$

odde $\Leftrightarrow \det(M_\sigma) = -1$

Vi skriver $\operatorname{sgn}(\sigma) = \pm 1$

Eks

$$\operatorname{sgn}(id) = \operatorname{sgn}((12)(12)) = 1$$

sgn er antall transposisjoner mod 2

Eks $(136)(28)(457) = (13)(36)(28)(45)(57)$ $\operatorname{sgn} = -1$

Thm $\operatorname{sgn}(a_1 a_2 a_3 \dots a_n) = (-1)^{n-1}$.

Bevis $(a_1 a_2 \dots a_n) = \underbrace{(a_1 a_n)(a_1 a_{n-1}) \dots (a_1 a_2)}_{n-1}$

$\operatorname{sgn}(12) = -1$

$\operatorname{sgn}(123) = \operatorname{sgn}((13)(12)) = 2$

$\operatorname{sgn}(1234) = \operatorname{sgn}((14)(13)(12)) = 3$

etc

Vi kan definere ekvivalensrelasjon

$$\sigma \sim \tau \overset{\text{def}}{\iff} \operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau)$$

i) $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma)$

ii) $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau) \Rightarrow \operatorname{sgn}(\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)$

iii) $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau)$, $\operatorname{sgn}(\tau) = \operatorname{sgn}(\lambda) \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\lambda)$

- Mengden av jevne permutasjoner er ulikhet (gjelda også odde)
- Identiten er jevn (gjelda ikk odd)
- Inversen til en jevn/odde permutasjon er jevn/odde (gjelda også odde)

$\Rightarrow$ Jevne permutasjoner danner undergruppe $A_n \leq S_n$.

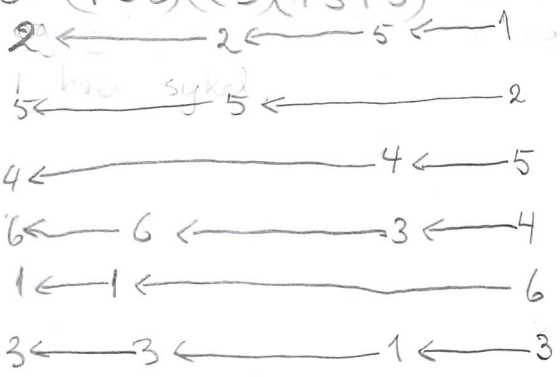
$\sigma = (14)(23)(12) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \sigma^{-1} = (12)(23)(14) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

	1	2	3	4
σ	3	4	2	1
σ^{-1}	1	2	3	4

Oppskrift på å skrive en permutasjon som et disjunkt produkt

1. $\sigma = (136)(25)(4315)$



$\sigma = (12$

$\sigma = (125$

$\sigma = (1254$

$\sigma = (12546$

$\sigma = (12546)$

$\sigma = (12546)(3)$

$= (12546)$