Foreleswing 31. januar 2024

Restklasser (Cosets)

Thm 10.1 $H \leq G$ Definer to ekvivalensrelasjonar $\sim_L$ $\sim_R$ på G

$$a \sim_L b \iff a^{-1}b \in H$$
$$a \sim_R b \iff ab^{-1} \in H$$

Bevis for $\sim_L$

i) $a \sim_L a$ sidan $a^{-1}a = e \in H$

ii) $a \sim_L b$ betyr $a^{-1}b \in H$

$b \sim_L a$ gir $(a^{-1}b)^{-1} = b^{-1}a \in H$

iii) $a \sim_L b, b \sim_L c$ betyr $a^{-1}b, b^{-1}c \in H$

$\Rightarrow a^{-1}bb^{-1}c = a^{-1}c \in H$

som betyr $a \sim_L c$.

QED

$\sim_L$ gir opphav til partisjon av G

$\rightsquigarrow$ Restklasser: $g \in G$ gH

Bevis La $g \in G$. Da har vi $x \in gH$ betyr $g^{-1}x \in H$

Som er $g \sim_L x$. På den annen side har vi

$g \sim_L x \Rightarrow g^{-1}x \in H$, dvs $x \in gH$. QED

Tilsvarende for $\sim_R$

Def. 10.2 $H \leq G$ $aH = \{ah \mid h \in H\}$ venstre restklasse

$Ha = \{ha \mid h \in H\}$ høgre — " —

Kvorfor gjer vi dette?

Vi vil definere gruppe $G/H = \{aH \mid a \in G\}$

Eksempel $3\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$

Restklasser (venstre = høgre): $\mathbb{Z}$, $1+\mathbb{Z}$, $2+\mathbb{Z}$

↑ Egenskap for abelske grupper

Eksempel $S_3 = \{e, \rho, \rho^2, \mu, \mu\rho, \mu\rho^2\}$ $\rho = (123)$ $\mu = (12)$

	e	ρ	ρ^2	μ	$\mu\rho$	$\mu\rho^2$
1	1	2	3	2	1	3
2	2	3	1	1	3	2
3	3	1	2	3	2	1

$\rho^3 = \mu^2 = e$
$\rho\mu = \mu\rho^2$

Undergruppe $H = \{e, \rho, \rho^2\}$

To restklasser H, $\mu H = H\mu$

Felles $\rho H = H$ $\mu\rho^2 H = \mu H$ etc.

Undergruppe $K = \{e, \mu\}$

Tre venstre restklasser $K, \rho K, \rho^2 K$

- " - høgre - " - $K, K\rho, K\rho^2$

Merk: $\rho^2 K = K\rho$

Observasjon: $|gH| = |H| = |Hg|$

Bevis $\varphi : H \longrightarrow gH$
$h \longmapsto gh$

Injektiv fordi $h_1, h_2 \mapsto gh_1 = gh_2 \Rightarrow h_1 = h_2$

surjektiv fordi $gh \in H$, $h \mapsto gh$.

Thm 10.10. (Lagrange)

$H \leq G \Rightarrow |H| \mid |G|$

Endelig

Def 10.13 Indeks til en undergruppe

$$(G : H) = \frac{|G|}{|H|}$$

Eksempel $6\mathbb{Z}_{24} \leq \mathbb{Z}_{24}$ $\quad |6\mathbb{Z}_{24}| = 4 \quad |\mathbb{Z}_{24}| = 24$

$$(\mathbb{Z}_{24} : 6\mathbb{Z}_{24}) = \frac{24}{4} = 6$$

Thm 10.14 $K \leq H \leq G \Rightarrow (G:K) = (G:H)(H:K)$

Bevis $g \sim_L h$ i G er det samme som i H.

Q.E.D.

Factor groups

Motivation: Faktoriser 195. 5 deler 195, derfor betrakt $\frac{195}{5} = 39 = 3 \cdot 13 \Rightarrow 195 = 3 \cdot 5 \cdot 13$

Ønsker å gjøre det samme med grupper.

$$H \leq G \quad (\dashrightarrow G/H)$$

?

$5 \quad 195 \quad \{0,1,2,3,4\}$ Addisjon modulo 5

$5\mathbb{Z}_{195} \leq \mathbb{Z}_{195}$ Factor group $\{5\mathbb{Z}_{195}, 5\mathbb{Z}_{195}+1, \ldots, 5\mathbb{Z}_{195}+4\} \simeq \mathbb{Z}_5$

$5\mathbb{Z}_{195} \simeq \mathbb{Z}_{39}$ etc

Vi vil at $G/H = \{H, g_1H, g_2H, \ldots, g_nH\}$ er en gruppe under multiplikasjon

Vel-definert binær operasjon

$$g_1H \cdot g_2H = g_1g_2H$$

$$\Rightarrow \quad Hg_2 = g_2H \text{ eller } g_2^{-1}Hg_2 = H \quad \forall g_2 \in G$$

ERs

$$\varphi: G \longrightarrow K$$

surjektiv gruppehomomorfi

$$H = \ker \varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = e\}$$

- lukket : $h_1, h_2 \in H \Rightarrow \varphi(h_1 h_2) = \varphi(h_1)\varphi(h_2) = ee = e$
- enhet : $\varphi(e) = e$
- invers : $\varphi(h^{-1}) = \varphi(h)^{-1} = e^{-1} = e$

(Definisjon) – NORMAL : $gHg = H$ fordi $\varphi(g^{-1}hg) = \varphi(g)^{-1}\varphi(h)\varphi(g)$

$$= \varphi(g)^{-1} e \varphi(g)$$

$$= \varphi(g)^{-1}\varphi(g)$$

$$= e$$

$$\Rightarrow \quad K \simeq G/H$$

Ex

$$5\mathbb{Z}_{195} \longrightarrow \mathbb{Z}_{195} \longrightarrow \mathbb{Z}_{195}/5\mathbb{Z}_{195} \simeq \mathbb{Z}_{39}$$

$$3\mathbb{Z}_{39} \longrightarrow \mathbb{Z}_{39} \longrightarrow \mathbb{Z}_{39}/3\mathbb{Z}_{39} \simeq \mathbb{Z}_{13}$$

$$\mathbb{Z}_{195} \xrightarrow[5]{} \mathbb{Z}_{39} \xrightarrow[3]{} \mathbb{Z}_{13} \xrightarrow[13]{} \{e\}$$

$$\{e\} \subset 15\mathbb{Z}_{195} \subset 5\mathbb{Z}_{195} \subseteq \mathbb{Z}_{195}$$

$$\mathbb{Z}_{13} \qquad \mathbb{Z}_3 \qquad \mathbb{Z}_5$$

Fundamentale homomorfiteorem

Thm 14.9

$H \leq G$ normal

$$\gamma: G \longrightarrow G/H, \quad x \longmapsto xH$$

γ homomorfi av grupper

$\ker \gamma = H.$

Bevis

- homomorfi: $\gamma(xy) = (xy)H \overset{\text{normal}}{=} (xH)(yH) = \varphi(x)\varphi(y)$
- kjerne $\gamma(x) = xH = H \Rightarrow x \in H$.

QED

Thm 14.11

$\varphi: G \longrightarrow G'$ gruppehomomorfi
$H = \ker\varphi$
$\gamma: G \to G/H$
$g \mapsto gH$

1) $\varphi[G] = \{\varphi(g) \mid g \in G\}$ gruppe.
2) $\mu: G/H \longrightarrow \varphi[G]$ isomorfi
$gH \longmapsto \varphi(g)$
3) $\varphi(g) = \mu\gamma(g) \quad \forall g \in G$.

Bevis

1) Bildet av en gruppehomomorfi er en gruppe
   1) $\varphi(g)\cdot\varphi(g') = \varphi(gg')$
   2) $\varphi(e)$ identitet
   3) $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$

2) $\mu(gH) = \varphi(g) = e'$
   hvis $\Rightarrow g \in \ker\varphi = H$
   dvs $gH = H$ identitet i G/H
   $\forall\varphi(g) \in \varphi[G] \Rightarrow \mu(gH) = \varphi(g)$

3) $\mu\gamma(g) = \mu(gH) = \varphi(g)$. ved definisjon

QED.

Eks

$\varphi: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_{60}$
$1 \longmapsto 18$

$\ker\varphi = \{\ldots, -20, -10, 0, 10, 20, \ldots\}$

$\Rightarrow \varphi(\mathbb{Z}) = \{0, 18, 36, 54, 12, 30, 48, 6, 24, 42\}$.
$= \{\overset{10}{0}, \overset{7}{6}, \overset{4}{12}, \overset{1}{18}, \overset{8}{24}, \overset{5}{30}, \overset{2}{36}, \overset{9}{42}, \overset{6}{48}, \overset{3}{54}\} = 6\mathbb{Z}_{60} \cong \mathbb{Z}_{10}$

$\mathbb{Z}_{10} \cong \mathbb{Z}/\ker\varphi \longrightarrow \varphi(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{10}$
$a + (10) \longmapsto 18a \pmod{60}$

$H \leq G$ normal

Ekvivalent:

1) $g^{-1}hg \in H \quad \forall g \in G, \; h \in H$
2) $g^{-1}Hg = H \quad \forall g \in G$
3) $gH = Hg \quad \forall g \in G$.

Alle undergrupper av abelske grupper er normale.

Thm/Def 14.15

$$H \leq G \Rightarrow g^{-1}Hg \leq G$$

konjugerte undergruppe

Bevis

Lukket: $g^{-1}h_1g \cdot g^{-1}h_2g = g^{-1}h_1h_2g$

Identitet: $g^{-1}eg = g^{-1}g = e$

Invers: $g^{-1}h^{-1}g \cdot g^{-1}hg = g^{-1}h^{-1}hg = g^{-1}g = e$.

Vi har $|g^{-1}Hg| = |H|$

fordi $\left.\begin{array}{l} \varphi_g : H \longrightarrow g^{-1}Hg \\ \quad h \longmapsto g^{-1}hg \end{array}\right\}$ homomorfi, bijeksjon,

1) $\varphi_g(h_1h_2) = g^{-1}h_1h_2g = g^{-1}h_1gg^{-1}h_2g = \varphi_g(h_1)\varphi_g(h_2)$
2) $\varphi_g(h) = g^{-1}hg = e \Rightarrow hg = g \Rightarrow h = e$.
3) $g^{-1}hg \longleftarrow \varphi_g(h)$

Konjugerte undergrupper.

G gruppe $\quad aba^{-1}b^{-1} \in G$ for $a, b \in G$ kommutator

$C(G)$ = Kommutator undergruppe av G: Minste normale undergruppe av G som inneholder alle kommutatorer

G abelsk $\Rightarrow \quad C(G) = \{e\}$

$G/C(G)$ er abelsk $\quad C = C(G)$

$g_1 C g_2 C g_1^{-1} C g_2^{-1} C$

$= g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} C = C$

Normal