Forelesning 7 februar 2024

Def. En isometri $m: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er en inverterbar lineæravbildning som oppfyller $d(m(\bar{x}), m(\bar{y})) = d(\bar{x}, \bar{y})$ hvor $d(\bar{x}, \bar{y}) = \| \bar{y} - \bar{x} \|$. Mengden av isometrier gis navnet Isom_2.

Thm. Isom_2 er en gruppe

Bevis Operasjone er komposisjon som er assosiativ
$\mathrm{Id} \in \mathrm{Isom}_2$ og $g \in \mathrm{Isom}_2 \Rightarrow g^{-1} \in \mathrm{Isom}_2$

Merk. Isometrier bevarer også vinkler, siden de bevarer indreprodukt

$$d(m(\bar{x}), m(\bar{y}))^2 = (m(\bar{y}) - m(\bar{x}))^2$$
$$= m(\bar{y})^2 - 2m(\bar{x})m(\bar{y}) + m(\bar{x})^2$$
$$= \bar{y}^2 - 2m(\bar{x})m(\bar{y}) + \bar{x}^2$$

$$d(\bar{x}, \bar{y})^2 = (\bar{y} - \bar{x})^2$$
$$= \bar{y}^2 - 2\bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x}^2$$

$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \bar{x} \cdot \bar{y} = m(\bar{x}) \cdot m(\bar{y})$

Thm Isometrier $m: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er gitt ved $m(\bar{x}) = A\bar{x} + \bar{b}$. hvor A ortogonal 2×2-matrise og $\bar{b} \in \mathbb{R}^2$

Bevis La $\bar{b} = m(\bar{0})$. Da har vi $m(\bar{x}) - \bar{b}$ oppfyller

$$m(\bar{0}) - \bar{b} = m(\bar{0}) - m(\bar{0}) = \bar{0}$$

La $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være en lineær avbildning som oppfyller $T(\bar{e}_i) = m(\bar{e}_i) - \bar{b}$ for $i = 1, 2$, $T(\bar{0}) = \bar{0}$ (slike finnes alltid). Betrakt isometrien $T^{-1}(m - \bar{b})$ Vi har

$$T^{-1}(m - \bar{b})(\bar{0}) = T^{-1}T^{-1}(m(\bar{0}) - m(\bar{0})) = T^{-1}(\bar{0}) = \bar{0}$$
$$T^{-1}(m - \bar{b})(\bar{e}_i) = T^{-1}(m(\bar{e}_i) - \bar{b}) = T^{-1}T(\bar{e}_i) = e_i$$

Så $g = T^{-1}(m - \bar{b})$ er en isometri som fikserer $\bar{0}, \bar{e}_1, \bar{e}_2$

La $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 \in \mathbb{R}^2$. Da har vi $x_i = \bar{x} \cdot \bar{e}_i$

og $g(\bar{x}) \cdot \bar{e}_i = g(\bar{x}) \cdot g(\bar{e}_i) = \bar{x} \cdot \bar{e}_i = x_i \quad i = 1, 2$

$$\Rightarrow \quad g(\bar{x}) = \bar{x}.$$

$\Rightarrow$ $T^{-1}(m - \bar{b}) = id$ ellen $m(\bar{x}) = T(\bar{x}) + \bar{b} = A\bar{x} + \bar{b}$

hvor A er en ortogonal matrise siden

1) $\|T(\bar{e}_i)\| = \|m(\bar{e}_i) - \bar{b}\|$

$= \|m(e_i) - m(\bar{0})\| = \|\bar{e}_i - \bar{0}\| = \|\bar{e}_i\| = 1$

2) $T(\bar{e}_1) \cdot T(\bar{e}_2) = (m(\bar{e}_1) - m(\bar{0}))(m(\bar{e}_2) - m(\bar{0}))$

$= m(\bar{e}_1) \cdot m\bar{e}_2 - m(\bar{e}_1) \cdot m(\bar{0}) - m(\bar{0})m(e_2) + m(\bar{0})m(\bar{0})$

$= \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 - \bar{e}_1 \cdot \bar{0} - \bar{0} \cdot \bar{e}_2 + \bar{0} \cdot \bar{0} = 0$

QED

A ortogonal matrise $\Rightarrow$ $\det(A) = \pm 1$ (Rotasjon / refleksjon)

Eks Rotasjon om origo med vinkel $\frac{\pi}{2}$: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $S(\bar{x}) = A\bar{x}$

Rotasjon om punkt P — " — : $t_P(\bar{x}) = \bar{x} + P$

$S_P(\bar{x}) = t_P S t_{-P}$ $t_{-P} = t_P^{-1}$

Gruppa av ortogonale 2×2-matriser: $O(2)$

$Isom_2^0 = \{m \in Isom_2 \mid m(\bar{0}) = \bar{0}\} \simeq O(2)$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \leq Isom_2$

translasjoner

$Isom_2 = \langle S_\theta, \mu, t_{\bar{a}} \mid 0 \leq \theta < 2\pi, \mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rangle$

$S_{\theta_1} \cdot S_{\theta_2} = S_{\theta_1 + \theta_2}$, $\mu^2 = id$

$S_\theta \mu = \mu S_{-\theta_1}$

$S_\theta t_{\bar{a}} = t_{S_\theta(\bar{a})} S_\theta$, $t_{\bar{a}} t_{\bar{b}} = t_{\bar{a}+\bar{b}}$

$\mu t_{\bar{a}} = t_{\mu(\bar{a})} \mu$

$\Rightarrow$ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \trianglelefteq Isom_2$

normal undergruppe

Restklasser

$$m \cdot \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = (m-b)\,\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

punkt-isometri $\bar{0} \mapsto \bar{0}$

$$\Rightarrow \quad Isom_2 / \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \simeq Isom_2^{\circ}$$

Rotasjonsundergruppa $R \leq Isom_2^{\circ}$:

$$\mu S_\theta \mu = \mu\mu S_{-\theta} = S_{-\theta}$$

$\Rightarrow$ R er normal undergruppe

$R = [0, 2\pi\rangle$ med addisjon modulo 2π

$$Isom_2^{\circ} / R \simeq \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$$

$$Isom_2^{\circ} \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{Z}_2 \qquad \text{Homomorfi siden}$$
$$A \longmapsto \det(A) \qquad \det(AB) = \det(A)\det(B)$$

$$Ker(\det) = \{ A \in Isom_2^{\circ} \mid \det(A) = 1 \} \simeq R$$

Thm 12.5 En endelig undergruppe $G \leq Isom_2$ er enten isomorf med $\mathbb{Z}_n$ eller isomorf med D_n (dihedral)

Bevis
- Kan ikke inneholde translasjoner
- Generert av rotasjon med en minste vinkel
- Inneholder en refleksjon? $\longrightarrow \mathbb{Z}_n$ eller D_n

Mønster $\longleftrightarrow$ Karakterisert ved endelig undergruppe av $Isom_2^{\circ}$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \hookrightarrow & Isom_2 & \xrightarrow{\varphi} & Isom_2^{\circ} \\
\| & & & & \\
\ker\varphi & & \downarrow & & \downarrow \\
\| & & & & \\
\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \hookrightarrow & G & \xrightarrow{\varphi} & G^{\circ} \\
 & & & & \text{endelig}
\end{array}$$

Bord: Mønster med $\mathbb{Z}$-translasjoner, f.eks

...EEEE.....

$G_1^0 \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ $\quad \alpha(F) = \exists$ bakvendt $\quad \alpha^2 = id$

$\alpha = (1,0)$ $\quad \beta(F) = \text{E}$ opp-ned $\quad \beta^2 = id$

$\beta = (0,1)$ $\quad \alpha\beta(F) = \exists$ rotert $\quad \alpha\beta = \beta\alpha$

Restklasser i G_1 (Merk: translasjoner: $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$)

$$G_1 = \coprod_{k \in \mathbb{Z}} t^k G_1^0$$

Kommutasjonsregler $\alpha t = t^{-1}\alpha$

$\beta t = t\beta$

Undergrupper av G_1: G_1 : ...HH...

$\langle \alpha, t \rangle$: ....ΠΠ....

$\langle \beta, t \rangle$: ...EE....

$\langle \alpha\beta, t \rangle$: ...SS....

$\langle t \rangle$: ....JJ....

$\langle t\beta, t^2 \rangle$ ...ΠEΠE...

$\langle t\beta, \alpha, t^2 \rangle$ ...Π.ΠΠ....

$\mathbb{R}^3$: ortogonale matriser $O(3)$, $\det(PMP^{-1}) = \det M$

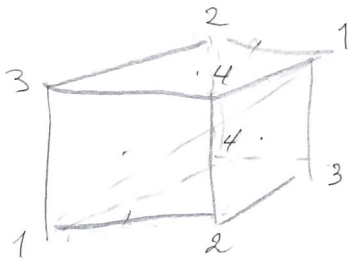
$SO(3) \leq O(3)$

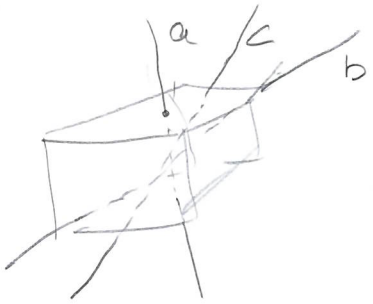
$\det = 1$

Normal

$SO(3) \simeq S^2 \times S^1$ $\quad O(3) \simeq S^2 \times S^1 \times \mathbb{Z}_2$

Symmetrier av en kube.





orden 1 id

orden 4 (1234), (1432), (1324), (1423), (1243), (1342) } a 3 akser

orden 3 (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243) } b

} S_4

orden 2 (12)(34), (13)(24), (14)(23) a

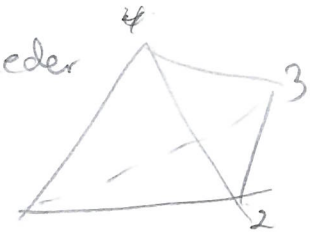
(12), (13), (14), (23), (24), (34) c

$S_4 \geq A_4$: {id, (123), (132) (124) (142), (134) (143), (234), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23)}

Normal

- Konjugasjon bevarer orden
- Konjugasjon bevarer jevn/odd antall transp.

A_4: Symmetrien til tetraeder



(142)(123)(124) = (134) Normal undergruppe må inneholde alle 3-sykler. strider mot Lagrange

(132)(12)(34)(123) = (13)(24) etc.

{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)} $\simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ fordi (12)(34)(13)(24) = (14)(23)

Normal undergruppe av A_4

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \leq A_4$ $A_4/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_3$

$A_4 \leq S_4$ $S_4/A_4 \simeq \mathbb{Z}_2$