Forelesning 14. februar 2024

Def 16.3

X mengde, G gruppe

En virkning av G på X er en avbildning

$$\cdot : G \times X \to X$$

slik at

i) $ex = x \quad \forall x \in X$

ii) $g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)x \quad \forall g_1, g_2 \in G, \; x \in X$

Ex

1) G virker på seg selv $G \times G \to G$

2) Matrisegruppe virker på vektorrom

$$\underset{n\times n\text{-matrix}}{A} \cdot \underset{n\text{-vektor}}{\bar{v}} = \underset{n\text{-vektor}}{A\bar{v}}$$

3) $X = \{\text{alle tall fra } 000 \text{ til } 999\}$

S_3 virker ved permutasjon

$((123), 468) = 846$

$((123), 222) = 222$

4) $H \leq G$ G virker på H ved konjugasjon

Thm 16.3

X mengde, G gruppe, $G \times X \to X$ virkning

1) $\forall g \in G; \; \sigma_g : X \to X$, $x \mapsto gx$

bijektiv

2) $\varphi : G \to S_X = \{\text{permutasjon av } X\}$

$g \mapsto \sigma_g$

gr. homomorfi, $\varphi(g)(x) = gx$

Bevis 1) $\sigma_g(x_1) = \sigma_g(x_2) \Leftrightarrow gx_1 = gx_2$

$\Rightarrow g^{-1}(gx_1) = g^{-1}(gx_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Injektiv

$\forall x \in G$; $\sigma_g(g^{-1}x) = x$ surjektiv.

2) $\varphi(g_1 g_2)(x) = (g_1 g_2)x = g_1(g_2 x) = g_1(\varphi(g_2)(x)) = \varphi(g_1)\,\varphi(g_2)(x)$

QED

Noen begreper:

Trofast virkning: $gx = x \ \forall x \in X \Rightarrow g = e$

Transitiv virkning: $\forall x_1, x_2 \in X$; $\exists g \in G$ slik at $gx_1 = x_2$

G virker på seg selv: $g g_1 = g_1 \ \forall g_1 \in G \Rightarrow g = e$

$\forall g_1, g_2 \in G \ \exists g = g_2 g_1^{-1}$ s.a $g g_1 = g_2 g_1^{-1} g_1 = g_2$

Noen definisjoner

$$X_g = \{x \in X \mid gx = x\} \qquad G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$$

Thm 16.12 G_x er en gruppe

Bevis 1) $g_1, g_2 \in G_x$ betyr $g_1 x = x$, $g_2 x = x \Rightarrow g_1 g_2 x = g_1 x = x$

2) $ex = x \Rightarrow e \in G_x$

3) $g \in G_x$; $gx = x \Rightarrow g^{-1} g x = g^{-1} x$ eller $x = g^{-1} x$, dvs $g^{-1} \in G_x$

Kalles ISOTROPI-UNDERGRUPPE

Baner:

Thm 16.14 Definer ekvivalensrelasjon: $x_1 \sim x_2$ hvis $\exists g \in G$ slik at $x_2 = g x_1$

Bevis: R. $x_1 \sim x_1$ ved $x_1 = \mathrm{id}\, x_1$

S. $x_1 \sim x_2 \Rightarrow x_2 = g x_1 \Rightarrow x_1 = g^{-1} x_2 \Rightarrow x_2 \sim x_1$

T. $x_1 \sim x_2, x_2 \sim x_3 \Rightarrow x_2 = g_1 x_1$, $x_3 = g_2 x_2 \Rightarrow x_3 = g_2 g_1 x_1$

Ekvivalensklasser kalles BANER (orbit). (Def 16.15)

skrives Gx

Thm 16.16

$x \in X$ G mengde gruppe

$G \times X \to X$ virkning

1) $|Gx| = (G : G_x)$

2) G endelig $\Rightarrow |Gx| \mid |G|$.

Bevis.

1) $x_1 \in Gx \Rightarrow x_1 = g_1 x \longmapsto g_1 G_x$ Def. avbildning

$x_2 = g_2 x \Rightarrow g_1 x = g_2 x$ eller $g_2^{-1} g_1 x = x$ vel-definert

dvs $g_2^{-1} g_1 \in G_x \Rightarrow g_1 G_x = g_2 G_x$

x_1, x_2 $\quad g_1 G_x = g_2 G_x \Rightarrow g_2^{-1} g_1 \in G_x$ injektiv

$g_1 x \; g_2 x$ $\quad$ dvs $g_2^{-1} g_1 x = x$ eller $g_1 x = g_2 x \Rightarrow x_1 = x_2$

$gG_x \rightsquigarrow x_1 = gx \in Gx$ surjektiv

gG_x restklasse

2) $|Gx| = |G : G_x| = \frac{|G|}{|G_x|} \mid |G|$

Ex

$X = \{000, \dots, 999\}$

$G = S_3$ $\quad |G| = 6$

1) $x = 158 \Rightarrow Gx = \{158, 185, 518, 581, 815, 851\}$

2) $x = 229 \Rightarrow Gx = \{229, 292, 922\}$

3) $x = 888 \Rightarrow Gx = \{888\}$

1) $G_x = \{e\}$ $\quad |Gx| = 6 \mid 6$

2) $G_x = \{e, (12)\}$ $\quad |Gx| = 3 \mid 6$

3) $G_x = S_3$ $\quad |Gx| = 1 \mid 6$

$X_{id} = \{x \in X \mid x = x\}$ $\quad |X_{id}| = 1000$

$X_{(12)} = \{x \in X \mid (12)x = x\}$ $\quad |X_{(12)}| = 100$

$X_{(123)} = \{x \in X \mid (123)x = x\}$ $\quad |X_{(123)}| = 10$

$|X_{id}| + |X_{(12)}| + |X_{(13)}| + |X_{(14)}| + |X_{(123)}| + |X_{(132)}| = 1000 + 300 + 20 = 1320$

$= \text{antall baner} \cdot |G|$

$\Rightarrow$ antall baner $= \frac{1320}{6} = 220$

Thm 17.1 Burnsides Formel

X endelig mengde, G endelig gruppe, $G \times X \to X$ virkning

r: antall baner

$$\Rightarrow \quad r \cdot |G| = \sum_{g \in G} |X_g|$$

Bevis.

Vi skal telle antall par $(g,x) \in G \times X$ som er slik at $gx = x$. Fikser g. $|X_g| = |\{x \in X \mid gx = x\}|$

$$N = \sum_{g \in G} |X_g|$$

Fikser x, $|G_x| = \{g \in G \mid gx = x\}$

$$N = \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|Gx|}$$

$\frac{1}{|Gx|}$ konstant for alle x i samme orbit; Gx

$$N = \sum_{x \in X} \frac{1}{|Gx|} \cdot |G| = \sum_{\text{distinkte orbiter}} |G|$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{g \in G} |X_g| = r \cdot |G|$$

$\Rightarrow$ Antall baner

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|$$

Ex.

$X = \{$mengden av alle undergrupper av $G\}$

G virker ved konjugasjon $(g,H) \mapsto g^{-1}Hg$

$$X_g = \{H \in X \mid g^{-1}Hg = H\} = \{H \in X \mid gH = Hg\}$$

$$G_H = \{g \in G \mid g^{-1}Hg = H\} = \{g \in G \mid gH = Hg\}$$

$G_H = \{$mengden av konjugerte undergrupper$\}$

Ex.



Males med 4 farger

I alt: $4^3 = 64$ måter å male,

$|X| = 64$

$G = S_3$ virker på X.

Antall baner er antall forskjellige måter å male

$|X_{id}| = 64$

$|X_{(12)}| = |X_{(13)}| = |X_{(14)}| = 16$

$|X_{(123)}| = |X_{(132)}| = 4$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{1}{6}(64 + 3 \cdot 16 + 2 \cdot 4) = \frac{120}{6} = \underline{\underline{20}}$$

Ex. De tre kantene skal ha ulik farge: (4·3·2 måter å male)

$|X| = 24$

$|X_{id}| = 24$

$|X_{(12)}| = |X_{(13)}| = |X_{(23)}| = 0$

$|X_{(123)}| = |X_{(132)}| = 0$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{1}{6}(24 + 0 + 0) = \underline{\underline{4}}$$

Ex. Antall tall 000 .... 999 $|X| = 1000$

$|X_{id}| = 1000$

$|X_{(12)}| = |X_{(13)}| = |X_{(23)}| = 100$

$|X_{(123)}| = |X_{(132)}| = 10$

$$r = \frac{1}{6}(1000 + 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10) = \underline{\underline{220}}$$

Ex 1) G virker på seg selv ved $(g, g_1) \mapsto gg_1$

$$|X_g| = |\{h \in G \mid gh = h\}| = 1$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g| = \frac{|G|}{|G|} = 1 \text{ bane}$$

2) G virker på seg selv ved $(g, h) = g^{-1}hg$. konjugasjon

$$X_g = \{h \in G \mid g^{-1}hg = h\} = \{h \in G \mid gh = hg\}$$
$$= C(g) \text{ kommutator undergruppe til } g$$

Antall konjugasjonsbaner $= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |C(g)|$

Ex $G = S_4$ $\quad |G| = 24$

$C(id) = G$ 1

$C(12) = \{id, (12), (12)(34), (34)\}$ 2

$h \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{matrix}$ $\quad h(12) = (12)h$

$1 \mapsto b$ $\quad 1 \mapsto (12)a$ $\quad \{a, b\} = \{1, 2\}$

$2 \mapsto a$ $\quad 2 \mapsto (12)b$

$3 \mapsto c$ $\quad 3 \mapsto (12)c$ $\quad \{c, d\} = \{3, 4\}$

$4 \mapsto d$ $\quad \mapsto (12)d$

$h(12)(34) = (12)(34)h$

$1 \mapsto b$ $\quad 1 \mapsto (12)(34)a$

$2 \mapsto a$ $\quad 2 \mapsto (12)(34)b$

$3 \mapsto d$ $\quad 3 \mapsto (12)(34)c$

$4 \mapsto c$ $\quad 4 \mapsto (12)(34)d$

$C((12)(34)) = \{id, (12), (12)(34), (34), (1324), (1423), (13)(42), (14)(23)\}$ 3

a	b	c	d	
1	2	3	4	id
1	2	4	3	(34)
2	1	3	4	(12)
2	1	4	3	(12)(34)
3	4	1	2	(13)(42)
3	4	2	1	(1324)
4	3	1	2	(1423)
4	3	2	1	(14)(23)

$C(123)$ $\quad h(123) = (123)h$

$h \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{matrix}$

$1 \mapsto b$ $\quad 1 \mapsto (123)a$ $\quad a, b, c = 1, 2, 3$ / $2, 3, 1$ / $3, 1, 2$

$2 \mapsto c$ $\quad 2 \mapsto (123)b$

$3 \mapsto a$ $\quad 3 \mapsto (123)c$ $\quad d = 4$

$4 \mapsto d$ $\quad 4 \mapsto (123)d$

$C(123) = \{id, (123), (132)\}$ 9

$(1423)(12)(34)(1324) = (12)(34)$

$C(1234)$ $\quad h(1234) = (1234)h$

$h: \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{matrix}$

$1 \mapsto b$ $\quad 1 \mapsto (1234)a$

$2 \mapsto c$ $\quad 2 \mapsto (1234)b$

$3 \mapsto d$ $\quad 3 \mapsto (1234)c$

$4 \mapsto a$ $\quad 4 \mapsto (1234)d$

a	b	c	d
1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

$C(1234) = \{id, (1234), (13)(24), (1432)\}$ 6

Antall konjugasjonsklasser $= \frac{1}{24}(24 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 8 \cdot 3 + 6 \cdot 4)$

$= \underline{5}$

orden: 1 $\quad$ 2 (12) (12)(34) $\quad$ 3 $\quad$ 4