Forelesning 26. februar 2024

Motivasjon: Bygge opp grupper v.h.a. simple grupper

Ex. $G \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{r_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_n^{r_n}}$
abelsk

$\mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \longrightarrow \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q / \mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}_q$

$\{e\} \leq \mathbb{Z}_p \leq \mathbb{Z}_{p^2} \leq \mathbb{Z}_{p^3}$ Faktorgrupper: $\mathbb{Z}_{p^2}/\mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}_p$

$\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$
VI UI
$\mathbb{Z}_2 = \{0, 2\}$

Mye mer kompliserat for ikke-abelske grupper!

Defn 35.1

$\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_n = G$

SUBNORMAL FØLGE av undergrupper: $H_i \leq H_{i+1}$ normal

NORMAL FØLGE — " — : $H_i \leq G$ normal

Normal $\Rightarrow$ subnormal
(men ikke motsatt)

Ex.

$\{e\} \leq H \leq K \leq A_4 \leq S_4$

$K = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

$H = \{e, (12)(34)\}$

subnormal, men ikke normal!

A_4: $\{e\}$ 1
$(12)(34)$ 3
(123) 8
12

$H \leq S_4$ ikke normal: $(13)^{-1}(12)(34)(13) = (14)(23) \notin H$

$H \leq K$ normal: $(13)(24)(12)(34)(13)(24) = (12)(34)$

$K \leq A_4$ normal: siden K inneholder alle elementer i A_4 av orden 2.

Defn 35.4

Forfining av en subnormal følge:

$$\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_n = G$$

$$\{e\} = K_0 \leq K_1 \leq \cdots \leq K_m = G$$

For alle i, $\exists j$ slik at $H_i = K_j$

Alt. $\{H_i\} \subseteq \{K_j\}$.

Ex.

$$\{0\} \leq 24\mathbb{Z} \leq 8\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$$

kan forfines til:

$$\{0\} \leq 48\mathbb{Z} \leq 24\mathbb{Z} \leq 8\mathbb{Z} \leq 4\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$$

Defn 35.6

To subnormale følger $\{H_i\}, \{K_j\}$ for samme gruppe G er ISOMORFE dersom de har isomorfe faktorgrupper:

$$\{H_i/H_{i-1}\} \xleftrightarrow{1\text{-}1} \{K_j/K_{j-1}\}$$

$$H_i/H_{i-1} \simeq K_j/K_{j-1}$$

(trenger ikke å ha samme rekkefølge)

Ex.

$(0) \leq 5\mathbb{Z}_{15} \leq \mathbb{Z}_{15}$ har faktorgruppe $5\mathbb{Z}_{15}/(0) \simeq \mathbb{Z}_3$

$\mathbb{Z}_{15}/5\mathbb{Z}_{15} \simeq \mathbb{Z}_5$

$(0) \leq 3\mathbb{Z}_{15} \leq \mathbb{Z}_{15}$: $3\mathbb{Z}_{15}/(0) \simeq \mathbb{Z}_5$

$\mathbb{Z}_{15}/3\mathbb{Z}_{15} \simeq \mathbb{Z}_3$

Delmål 1: Finne maksimale forfininger av en subnormal følge.

Delmål 2: To subnormale følger for en gruppe G har alltid en felles forfining.

35.10. Zassenhaus Lemma (Butterfly lemma)

$H^* \trianglelefteq H \leq G$ (H^* normal)

$K^* \trianglelefteq K \leq G$ (K^* normal)

skal vise:

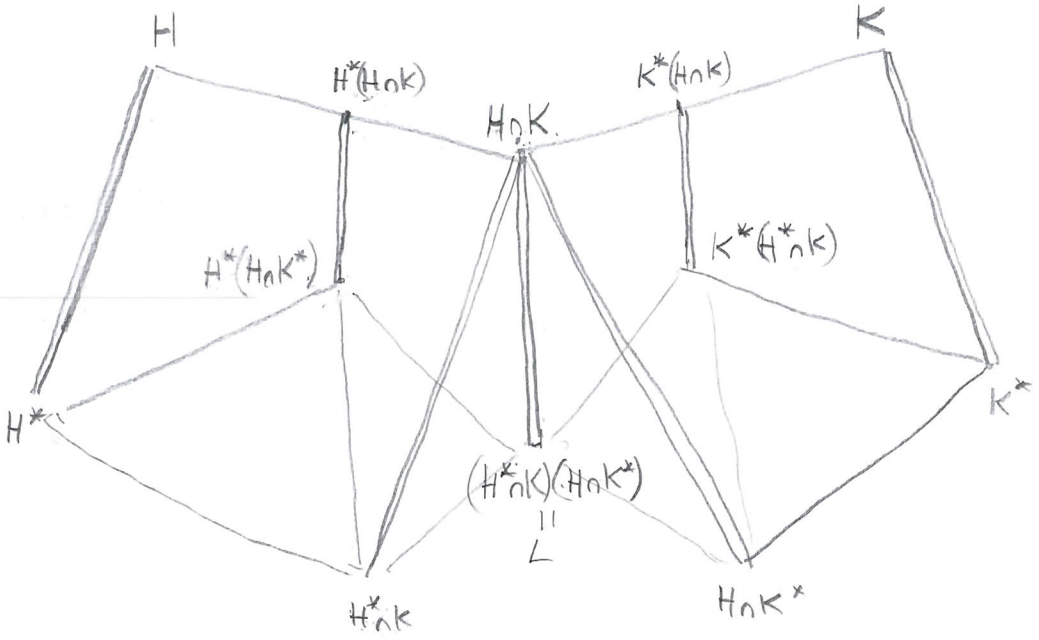
1) $H^*(H\cap K^*) \trianglelefteq H^*(H\cap K)$ (normal) } symmetri
$K^*(H^*\cap K) \trianglelefteq K^*(H\cap K)$ (normal)

2) $\dfrac{H^*(H\cap K)}{H^*(H\cap K^*)} \cong \dfrac{(H\cap K)}{(H^*\cap K)(H\cap K^*)}$

(kan bytte om H og K)

Husk:
1) $H \leq G \Rightarrow HN \leq G$ gruppe
normal: $N \trianglelefteq$
2) $H \leq G \Rightarrow HN \leq G$ normal
normale $N \trianglelefteq$

Bevis



$H^*(H\cap K) \longrightarrow H\cap K/L$
$hx \longmapsto xL$

1) vel-definert $h_1x_1 = h_2x_2$
$\Rightarrow h_2^{-1}h_1 = x_2x_1^{-1} \in H^*\cap(H\cap K) = H^*\cap K \cap L$

$\Rightarrow x_1L = x_2L$

2) kjerne: $x \in L = (H^*\cap K)\cdot(H\cap K^*)$
$\Rightarrow hx \in H^*\cdot(H^*\cap K)\cdot(H\cap K^*)$
$= H^*(H\cap K^*)$

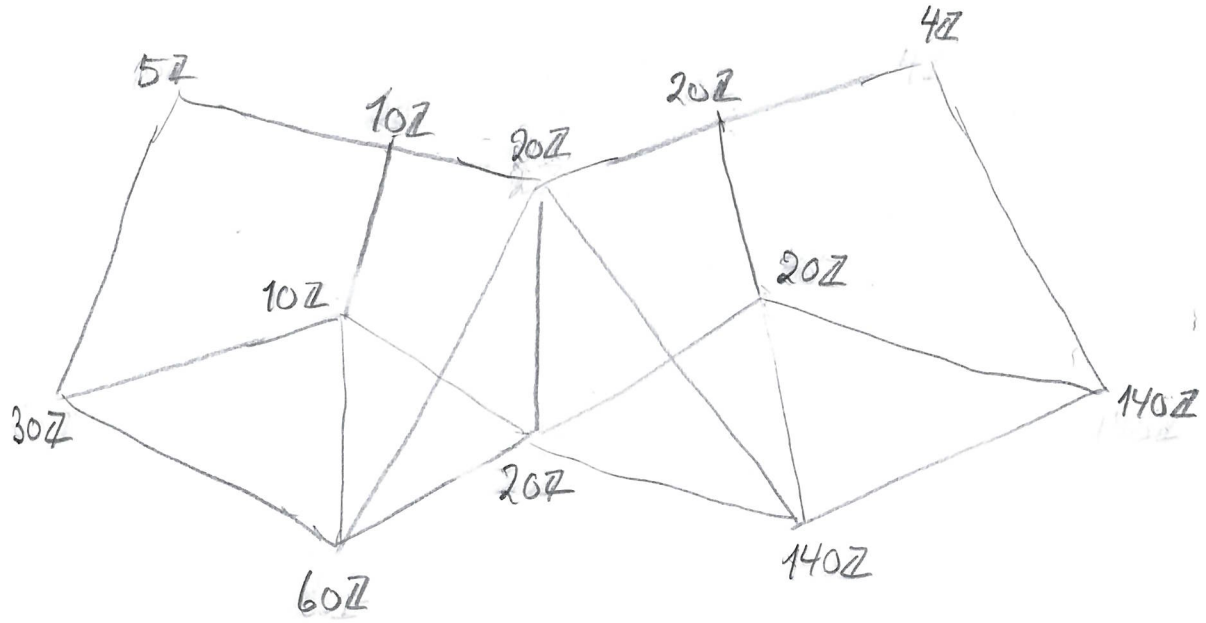
3) Surjektiv

$\dfrac{H^*(H\cap K)}{H^*(H\cap K^*)} \cong H\cap K/L$ $\Leftarrow$

Ex.

H: $30\mathbb{Z} \leq 5\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$

K: $140\mathbb{Z} \leq 4\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$



Thm 35.11

To subnormale følger av samme gruppe har en felles forfining.

Bevis

$$\{e\} \leq H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_n = G$$
$$\{e\} \leq K_0 \leq K_1 \leq \cdots \leq K_m = G$$

$$H_i \leq H_i(H_{i+1} \cap K_j) \leq H_{i+1} \qquad j = 0, 1, \ldots, m$$
$$\qquad\qquad\quad \| \; H_{ij}$$

$$\{e\} = H_{00} \leq H_{01} \leq \cdots \leq H_{0m} = H_{10}$$
$$H_{10} \leq H_{11} \leq \cdots \leq H_{1m} = H_{20}$$
$$\vdots$$
$$H_{n-1,0} \leq \cdots \leq H_{n-1,m} = G$$

Tilsvarende for K: $K_{pq} = K_p(H_q \cap K_{p+1})$

$$\Rightarrow \quad H_{ij}/H_{i,j+1} \simeq H_i(H_{i+1} \cap K_{j+1})/H_i(H_{i+1} \cap K_j)$$
$$K_{ij}/K_{i,j+1} \simeq K_j(H_{i+1} \cap K_{j+1})/K_j(H_i \cap K_{j+1})$$

$H^* \; H \; K^* \; K$
$H_0 \leq H_{i+} \; K_j \leq K_{j+1}$

$\Rightarrow$ Zassenhaus

Defn 35.12 En subnormal følge $\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_n = G$ kalles en KOMPOSISJONSFØLGE dersom den er maksimal, dvs alle faktorgruppen H_i/H_{i+1} er simple

Thm. 35.15 (Jordan–Hölder)
To komposisjonsfølger til en gruppe G er isomorfe.

Q

Defn 35.18
En gruppe G er OPPLØSBAR dersom alle faktorgruppe er abelske

Ex
- Abelske grupper er oppløsbare
- S_4 er oppløsbar $\{e\} \leq H \leq K \leq A_4 \leq S_4$
  $\uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow$
  $\mathbb{Z}_2\ \mathbb{Z}_2\ \mathbb{Z}_3\ \mathbb{Z}_2$
- S_5 (A_5) er ikke oppløsbar
- Subnormal følge kan konstrueres ved sentere

$$Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz \ \forall g \in G\} \leq G \quad \text{normal}$$

$$h^{-1}zh\,g = h^{-1}z(hg) = h^{-1}(hg)z = gz$$
$$g(h^{-1}zh) = (gh^{-1})zh = z(gh^{-1})h = zg$$
} Men $gz = zg$

Ex $G = SL_2(\mathbb{Z}_3)$

Komposisjonsfølge: $\{e\} \leq \{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\} \leq Q \leq S_2(\mathbb{Z}_3)$
(2 over Q, 3 over $S_2(\mathbb{Z}_3)$)

$$G = D_4 = \langle s, \mu \mid s^4 = \mu^2 = e,\ s\mu = \mu s^{-1}\rangle$$
$$Z(G) = \langle e, s^2\rangle \quad \text{siden } \mu s^2 \mu = \mu^2 s^{-2} = s^2.$$

$$\{e\} \leq \langle e, s^2\rangle \leq D_4$$
$$\uparrow 2 \qquad \uparrow 4$$

Forfines til $\{e\} \leq \langle e, s^2\rangle \leq \langle e, s \mid s^4 = e\rangle \leq D_4$
$\uparrow 2 \qquad \uparrow 2 \qquad \uparrow 2$