Forelesning 6/3 - 2024

Repetisjon: Integritetsområde: kommutativ ring uten null-divisorer

Kropp: Ring der alle $\neq 0$-elementer har en invers.

F kropp $\Rightarrow$ F integritetsområde

F endelig integritetsområde $\Rightarrow$ F kropp

Kropper: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$, Rasjonale funksjoner

I ringa $\mathbb{Z}_m$ har vi $m \cdot a = 0$, dvs $\underbrace{a+a+\cdots+a}_{m} = 0$

Defn 19.13

R ring n: minste positive heltall slik at $n \cdot a = 0$ for alle $a \in R$.

kalles KARAKTERISTIKKEN til ringa; $\text{char}(R)$.

som i $\mathbb{Z}_p$

Hvis ingen n finnes sier vi at $\text{char}(R) = 0$.

(typisk for $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.)

Thm 19.15

Holder å spørre $n \cdot 1 = 0$

Bevis
- $n \cdot a = 0 \ \forall a \in R \Rightarrow n \cdot 1 = 0$
- Anta $n \cdot 1 = 0 \Rightarrow n \cdot a = a + a + \cdots + a = a(1 + \cdots + 1) = a(n \cdot 1) = a \cdot 0 = 0$

Konstruere kvosientkroppen til et integritetsområde

R

integritetsområde

1) Ekvivalensrelasjon på $R \times R$: $(a,b) \sim (c,d) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} ad - bc = 0$

R: $(a,b) \sim (a,b)$ fordi $ab - ba = 0$

S: $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad - bc = 0 \Rightarrow bc - ad = 0 \Leftrightarrow (c,d) \sim (b,b)$

T $(a,b) \sim (c,d) \sim (e,f)$ betyr $da - bc = fc - de = 0$

$$\Rightarrow fa - be = \frac{de}{c} a - \frac{dae}{c}$$

$$= \frac{dae}{c} - \frac{dea}{c} = 0$$

Q.E.D.

2) $[(a,b)] + [(c,d)] = [(ad+bc, bd)]$ legge sammen brøker

$(a_1,b_1) \sim (a_2,b_2) \Rightarrow$

$$[(a_1,b_1)] + [(c,d)] = [(a_1 d + b_1 c, b_1 d)]$$
$$[(a_2,b_2)] + [(c,d)] = [(a_2 d + b_2 c, b_2 d)]$$

og $(a_1 d + b_1 c) b_2 d - (a_2 d + b_2 c) b_1 d$

$$= a_1 b_2 d^2 + b_1 b_2 cd - a_2 b_1 d^2 - b_1 b_2 cd$$
$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1) d^2 + (b_1 b_2 - b_1 b_2) cd = 0 + 0 = 0$$

$[(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(ac, bd)]$

$$[(a_1,b_1)] + [(c,d)] = [(a_1 c, b_1 d)]$$
$$[(a_2,b_2)] + [(c,d)] = [(a_2 c, b_2 d)]$$

$$a_1 c \cdot b_2 d - a_2 c b_1 d = (a_1 b_2 - a_2 b_1) cd = 0$$

3) Q er kommutativ

$$[(a,b)] + [(c,d)] = (ad+bc, bd) = (cb+da, db)$$
$$[(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(ac, bd)] = [(ca, db)] = [(c,d)][(a,b)].$$

4) Assosiativitet

$$\big([(a,b)]+[(c,d)]\big)+[(e,f)] = [(ad+bc,bd)]+[(e,f)]$$
$$= [((ad+bc)f+bde,\ bdf)]$$
$$= [(adf+bcf+bde,\ bdf)]$$
$$= [(a,b)]+\big([(c,d)]+[(e,f)]\big)$$

5) $[(0,1)]+[(a,b)] = [(0\cdot b+1\cdot a,\ 1\cdot b)] = [(a,b)]$

6) $[(a,b)]+[(-a,b)] = [(ab-ab,\ b^2)] = [(0,b^2)] = [(0,1)]$ fordi $01-b^2\cdot 0 = 0$

7) Multiplikasjon er kommutativ og assosiativ.

8) $\big([(a,b)]+[(c,d)]\big)[(e,f)] = [(ad+bc,bd)]\cdot[(e,f)]$
$$= [(ade+bce,\ bdf)]$$
$$[(a,b)][(e,f)]+[(c,d)][(e,f)] = [(ae,bf)]+[(ce,df)]$$
$$= [(aedf+bfce,\ bdf^2)] = [((aed+bce)f,\ bdf\cdot f)]$$
$$\sim [(aed+bce,\ bdf)]$$

9) $[(1,1)]\cdot[(a,b)] = [(1\cdot a,\ 1\cdot b)] = [(a,b)]$

10) $[(a,b)] \not\sim [(0,1)] \Rightarrow [(a,b)]\cdot[(b,a)] = [(ab,ab)] \sim [(1,1)]$
betyr $a\neq 0$.

11) $R \longrightarrow R\times R/\sim$, $r \mapsto [(r,1)]$ er injektiv

$$r_1+r_2 \longmapsto [(r_1+r_2,1)] = [(r_1,1)]+[(r_2,1)]$$
$$r_1\cdot r_2 \longmapsto [(r_1r_2,1)] = [(r_1,1)]\cdot[(r_2,1)]$$

For $r_1 \mapsto [(r_1,1)] \sim [(r_2,1)] \longleftarrow r_2$ betyr $r_1\cdot 1 - r_2\cdot 1 = r_1-r_2 = 0$
dvs $r_1 = r_2$

12) $R \hookrightarrow R\times R/\sim \Rightarrow \exists\ R\times R/\sim \xrightarrow{\varphi} F$ injektiv

$R \xrightarrow{\psi} F$ kropp

Bevis $\varphi([(a,b)]) = \psi(a)\cdot\psi(b)^{-1}$

$[(a,b)]\sim[(c,d)] \Rightarrow \varphi[(c,d)] = \psi(c)\psi(d)^{-1}$

$\Leftrightarrow$

$ad=bc$ som betyr $\psi(ad) = \psi(a)\psi(d) = \psi(b)\psi(c) = \psi(bc)$

$\Downarrow$

$\psi(a)\psi(b)^{-1} = \psi(c)\psi(d)^{-1}$

dvs. φ er vel-definert

$$\varphi([(a,b)]\cdot[(c,d)]) = \varphi([(ac,bd)]) = \psi(ac)\psi(bd)^{-1}$$
$$= \psi(a)\psi(b)^{-1}\cdot\psi(c)\psi(d)^{-1}$$

$$\varphi([(a,b)]+[(c,d)]) = \varphi([(ad+bc,bd)]) = \psi(ad+bc)\psi(bd)^{-1}$$

$$\varphi([(a,b)])+\varphi([(c,d)]) = \psi(a)\psi(b)^{-1} + \psi(c)\psi(d)^{-1}$$
$$= \psi(a)\psi(d)\psi(d)^{-1}\psi(b)^{-1} + \psi(c)\psi(b)\psi(b)^{-1}\psi(d)^{-1}$$
$$= (\psi(a)\psi(d) + \psi(c)\psi(b))\,\psi(b)^{-1}\psi(d)^{-1}$$
$$= \psi(ad+bc)\cdot\psi(bd)^{-1}$$

$\varphi([(a,b)]) = \varphi([(c,d)])$ betyr $\psi(a)\psi(b)^{-1} = \psi(c)\psi(d)^{-1}$

dvs $\psi(a)\psi(d)\psi(d)^{-1}\psi(b)^{-1} = \psi(c)\psi(b)\psi(b)^{-1}\psi(d)^{-1}$

dvs $(\psi(a)\psi(d) - \psi(c)\psi(b))\psi(bd)^{-1} = 0$

$\iff \psi(ad-bc) = 0$

ψ er injektiv $\Rightarrow$ $ad-bc=0$ dvs $[(a,b)] \sim [(c,d)]$

$\Rightarrow$ $R \hookrightarrow F$ $\Rightarrow$ $R\times R/_\sim \hookrightarrow F$

R: integritetsområde; F: kropp

Det følger av 12) at $R\times R/_\sim$ er den minste kropper som inneholder R og den er entydig gitt opp til isomorfi.

Eksempler $R = \mathbb{Z} \Rightarrow R\times R/_\sim \simeq \mathbb{Q}$

R kropp $\Rightarrow$ $R\times R/_\sim \simeq R$

$$R \longrightarrow R\times R/_\sim$$
$$r \longmapsto [(r,1)]$$
$$R \longleftarrow R\times R/_\sim$$
$$\frac{a}{b} \longleftarrow [(a,b)]$$

$r \mapsto [(r,1)] \mapsto \frac{r}{1} = r$

$\mathbb{R}[x]$ (integritetsområde) $\Rightarrow$ $\mathbb{R}[x]\times\mathbb{R}[x]/_\sim \simeq \mathbb{R}(x) = \left\{\frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]\right\}$