UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT2200 — Grupper, ringer og kropper
Eksamensdag:	Mandag 8. juni 2026
Tid for eksamen:	15.00 – 19.00
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamensoppgaven består av 12 deloppgaver som hver teller like mye. Oppgaven kan besvares på norsk eller engelsk. Husk at alle svar må begrunnes. Lykke til!

Oppgave 1

a

Oppgi alle abelske grupper av orden 12, opp til isomorfi.

b

For hver slik gruppe, oppgi om gruppen inneholder et element av orden 4.

Oppgave 2

Si at en **partisjon** av mengden $\{1,2,3,4\}$ er en mengde $\{A,B\}$, hvor A og B er disjunkte delmengder av $\{1,2,3,4\}$ med $|A| = |B| = 2$. La X være mengden av slike partisjoner, det vil si

$$X = \{\{\{1,2\},\{3,4\}\},\{\{1,3\},\{2,4\}\},\{\{1,4\},\{2,3\}\}\}.$$

For $\sigma \in S_4$ og $\{\{a,b\},\{c,d\}\} \in X$, la

$$\sigma \cdot \{\{a,b\},\{c,d\}\} = \{\{\sigma(a),\sigma(b)\},\{\sigma(c),\sigma(d)\}\}.$$

a

Vis at dette definerer en gruppevirkning av S_4 på X.

For $\sigma \in S_4$, la

$$X_\sigma = \{x \in X \mid \sigma x = x\},$$

og la

$$H = \{\sigma \in S_4 \mid X_\sigma = X\},$$

det vil si at H er mengden av de $\sigma \in S_4$ som fikserer hele X.

(Fortsettes på side 2.)

b

Vi oppgir (og du kan bruke) at H har nøyaktig fire elementer. Finn disse.

c

Vis at H er en normal undergruppe av S_4.

Oppgave 3

a

Finn alle $x \in \mathbb{Z}_7$ slik at $x^{86} = 1$.

b

La p være et primtall, la $k \in \{1, \ldots, p-2\}$, la $q \in \mathbb{N}$, og la $n = q(p-1)+k$. La $a \in \mathbb{Z}_p$. Vis at ligningen $x^n = a$ har maksimalt k løsninger for $x \in \mathbb{Z}_p$.

Oppgave 4

La S være en mengde, og la A_S være ringen av alle funksjoner $f\colon S \to \mathbb{R}$, med punktvis addisjon og multiplikasjon definert som vanlig for funksjoner.

a

Vis at A_S er et integritetsområde hvis og bare hvis S inneholder nøyaktig ett element.

b

La $T \subseteq S$, og la

$$I_T = \{f \in A_S \mid f(t) = 0 \text{ for alle } t \in T\}.$$

Vis at I_T er et ideal i A_S og at $A_S/I_T \simeq A_T$.

Oppgave 5

La $\omega = e^{\frac{2\pi i}{7}} \in \mathbb{C}$, og la $E = \mathbb{Q}(\omega)$. Polynomet

$$\Phi_7(x) = \frac{x^7 - 1}{x - 1} = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

er irredusibelt over $\mathbb{Q}$, og dette kan brukes uten bevis.

a

Vis at E er rotkroppen til $\Phi_7(x)$ over $\mathbb{Q}$.

b

Vis at det finnes en automorfi $\sigma \in G(E/\mathbb{Q})$ med $\sigma(\omega) = \omega^3$, og at σ har orden 6. Vis at $G(E/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}_6$.

(Fortsettes på side 3.)

c

La $K = \mathbb{Q}(\omega + \omega^6)$. Vis at

- $K \leq E$,
- $[K : \mathbb{Q}] = 3$,

og at K er den eneste kroppen med disse to egenskapene.

SLUTT

Ordliste

- kropp — field
- rotkropp — splitting field
- integritetsområde — integral domain
- gruppevirkning — group action