12. februar 2026

MAT2200 — Grupper, ringer og kropper

Obligatorisk oppgave 1 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 26. februar 2026, 14.30 i Canvas (canvas.uio.no).

Løsninger kan skrives på norsk eller engelsk. Ethvert forsøk på besvart oppgave vil godkjennes.

Fullstendige retningnslinjer om obligatoriske oppgaver:

https://www.uio.no/studier/eksamen/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

Problem 1. Betrakt gruppen $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, hvor gruppeoperasjonen er vanlig multiplikasjon av komplekse tall. La

$$A = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| \leq 1\}.$$

(a) Er A lukket under multiplikasjon?

(b) Er A en undergruppe av $\mathbb{C}^*$?

Problem 2. La G være en endelig gruppe med identitetselement e. Anta at for alle $g \in G$ gjelder

$$g^2 = e.$$

(a) La $a, b \in G$. Vis at

$$aba^{-1}b^{-1} = e.$$

(b) Vis at G er abelsk.

(c) Vis at G er enten triviell eller isomorf med gruppen

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_2 = \overbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}^{n}$$

for en eller annen $n \geq 1$.

Problem 3. La

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_5.$$

(a) Skriv σ som et produkt av disjunkte sykler.

(b) Ligger σ i A_5?

(c) Hva er ordenen til σ?

(d) For den sykliske gruppen $\langle\sigma\rangle$ og elementet $(1,4) \in S_5$, vis at venstre restklasse $(1,4)\langle\sigma\rangle$ ikke er lik høyre restklasse $\langle\sigma\rangle(1,4)$.

Problem 4. La $GL_2(\mathbb{R})$ være gruppen av reelle, inverterbare (2×2)-matriser, det vil si

$$GL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0 \right\},$$

med gruppeoperasjonen matrisemultiplikasjon. La

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R}, ad \neq 0 \right\} \subseteq GL_2(\mathbb{R}).$$

(a) Vis at B er en undergruppe av $GL_2(\mathbb{R})$.

La nå $M_1, M_2 \in GL_2(\mathbb{R})$ være gitt ved

$$M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

(b) Vis at hvis $M_1 B = M_2 B$, så finnes en $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ slik at

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

.

(c) Vis at hvis det finnes en $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ slik at

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

så er $M_1 B = M_2 B$.

Hint: Beregn $M_2^{-1} M_1$.