11. mars 2026

# MAT2200 — Grupper, ringer og kropper

Obligatorisk oppgave 1 av 2

### Innleveringsfrist

Torsdag 26. februar 2026, 14.30 i Canvas (canvas.uio.no).

Løsninger kan skrives på norsk eller engelsk. Ethvert forsøk på besvart oppgave vil godkjennes.

### Fullstendige retningnslinjer om obligatoriske oppgaver:

https://www.uio.no/studier/eksamen/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

**Problem 1.** Betrakt gruppen $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, hvor gruppeoperasjonen er vanlig multiplikasjon av komplekse tall. La

$$A = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| \leq 1\}.$$

(a) Er $A$ lukket under multiplikasjon?

(b) Er $A$ en undergruppe av $\mathbb{C}^*$?

*Løsning:*

(a) La $z_1, z_2 \in A$. Da har vi at $|z_1|, |z_2| \leq 1$, og dermed er $|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \leq 1 \cdot 1 = 1$. Det følger at $z_1 z_2 \in A$, så $A$ er lukket under multiplikasjon.

(b) Mengden $A$ er ikke en undergruppe av $\mathbb{C}^*$, siden vi har $1/2 \in A$, men $(1/2)^{-1} = 2 \notin A$.

**Problem 2.** La $G$ være en endelig gruppe med identitetselement $e$. Anta at for alle $g \in G$ gjelder

$$g^2 = e.$$

(a) La $a, b \in G$. Vis at

$$aba^{-1}b^{-1} = e.$$

(b) Vis at $G$ er abelsk.

(c) Vis at $G$ er enten triviell eller isomorf med gruppen

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_2 = \overbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}^{n}$$

for en eller annen $n \geq 1$.

*Løsning:*

(a) Fra $a^2 = e$ og $b^2 = e$, vet vi at $a = a^{-1}$ og $b = b^{-1}$. Dermed har vi at

$$e = (ab)^2 = abab = aba^{-1}b^{-1}.$$

(b) For alle $a, b \in G$, har vi vist i punkt (a) at $aba^{-1}b^{-1} = e$. Ganger vi med $ba$ på høyre på begge sider av denne ligningen, får vi $ab = ba$. Dette betyr at $G$ er abelsk.

(c) Siden $G$ er abelsk og endelig, vet vi fra strukturteoremet for endelige abelske grupper at $G$ enten er triviell, eller isomorf til en gruppe

$$H = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_{p_i^{e_i}},$$

hvor $p_i$ er primtall og $e_i \geq 1$. Vi antar $G$ er ikketriviell, og vil vise at $p_i^{e_i} = 2$ for alle $i$.

Vi ser at for enhver $i = 1, \ldots, n$, har elementet $(0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots, 0) \in H$ orden $p_i^{e_i}$ i $H$. Siden alle elementer i $G$ har orden maksimalt 2, følger det at vi må ha $p_i^{e_i} = 2$ for alle $i$.

**Problem 3.** La

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_5.$$

(a) Skriv $\sigma$ som et produkt av disjunkte sykler.

(b) Ligger $\sigma$ i $A_5$?

(c) Hva er ordenen til $\sigma$?

(d) For den sykliske gruppen $\langle\sigma\rangle$ og elementet $(1,4) \in S_5$, vis at venstre restklasse $(1,4)\langle\sigma\rangle$ ikke er lik høyre restklasse $\langle\sigma\rangle(1,4)$.

*Løsning:*

(a) $\sigma = (1,2,5)(3,4)$.

(b) $\sigma = (1,5)(1,2)(3,4)$. Siden $\sigma$ er et produkt av tre transposisjoner, er $\sigma$ en odde permutasjon, så $\sigma$ ligger ikke i $A_5$.

(c) Ordenen til $\sigma$ er 6, som vi ser ved å beregne

$$\sigma^2 = (1,5,2), \sigma^3 = (3,4), \sigma^4 = (1,2,5), \sigma^5 = (1,5,2)(3,4), \sigma^6 = e.$$

(d) Siden $\sigma$ har orden 6, har vi at $\langle\sigma\rangle = \{\sigma^n \mid n = 0, \ldots, 5\}$. Vi regner ut

$$(1,4)\langle\sigma\rangle = \{(1,4), (1,2,5,4,3), (1,5,2,4), (1,4,3), (1,2,5,4), (1,5,2,4,3)\}$$

og

$$\langle\sigma\rangle(1,4) = \{(1,4), (1,3,4,2,5), (1,4,5,2), (1,3,4), (1,4,2,5), (1,3,4,5,2)\}$$

og ser at disse er ulike, for eksempel er $(1,4,3) \in (1,4)\langle\sigma\rangle$ mens $(1,4,3) \notin \langle\sigma\rangle(1,4)$.

*Alternativt, med litt mindre regning:* Siden $\sigma(3) = 4$ og $\sigma(4) = 3$, har vi at $\sigma^n(3) \in \{3, 4\}$ for all $n \in \mathbb{Z}$. Det følger at

$$(\sigma^n(1,4))(3) = \sigma^n(3) \in \{3, 4\}$$

for alle $n \in \mathbb{Z}$.

Siden $((1,4)\sigma)(3) = 1$, ser vi at $(1,4)\sigma \neq \sigma^n(1,4)$ for alle $n \in \mathbb{Z}$. Vi har altså at $(1,4)\sigma \in (1,4)\langle\sigma\rangle$ men $(1,4)\sigma \notin \langle\sigma\rangle(1,4)$, så $(1,4)\langle\sigma\rangle \neq \langle\sigma\rangle(1,4)$.

**Problem 4.** La $GL_2(\mathbb{R})$ være gruppen av reelle, inverterbare $(2\times2)$-matriser, det vil si

$$GL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0 \right\},$$

med gruppeoperasjonen matrisemultiplikasjon. La

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R}, ad \neq 0 \right\} \subseteq GL_2(\mathbb{R}).$$

(a) Vis at $B$ er en undergruppe av $GL_2(\mathbb{R})$.

La nå $M_1, M_2 \in GL_2(\mathbb{R})$ være gitt ved

$$M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

(b) Vis at hvis $M_1B = M_2B$, så finnes en $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ slik at

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

.

(c) Vis at hvis det finnes en $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ slik at

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

så er $M_1B = M_2B$.

*Hint:* Beregn $M_2^{-1}M_1$.

*Løsning:*

(a) Identitetselementet i $GL_2(\mathbb{R})$ er identitetsmatrisen $I_2$, som ligger i $B$.

For $A_1, A_2 \in B$ gitt ved

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix},$$

har vi at

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ 0 & d_1 d_2 \end{pmatrix},$$

som ligger i $B$, så $B$ er lukket under multiplikasjon.

For $A \in B$ gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

har vi

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -ba^{-1}d^{-1} \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix},$$

som ligger i $B$, altså inneholder $B$ inversen til alle sine elementer.

Dermed er $B$ en undergruppe av $GL_2(\mathbb{R})$.

(b) Hvis $M_1 B = M_2 B$, så har vi $M_1 \in M_2 B$, som vil si at det finnes en matrise

$$N = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in B$$

slik at $M_1 = M_2 N$. Vi har da

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = M_1 = M_2 N = \begin{pmatrix} aa_2 & ba_2 + db_2 \\ ac_2 & bc_2 + dd_2 \end{pmatrix}.$$

Dermed har vi

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Siden $N$ er invertibel, er $ad = \det(N) \neq 0$, så $a \neq 0$.

(c) Vi antar det finnes en $a \neq 0$ slik at

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Vi beregner

$$M_2^{-1} M_1 = (\det M_2)^{-1} \begin{pmatrix} d_2 & -b_2 \\ -c_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = (\det M_2)^{-1} \begin{pmatrix} d_2 a_1 - b_2 c_1 & d_2 b_1 - b_2 d_1 \\ -c_2 a_1 + a_2 c_1 & -c_2 b_1 + a_2 d_1 \end{pmatrix}.$$

Vi har

$$-c_2a_1 + a_2c_1 = -ac_2a_2 + aa_2c_2 = 0,$$

så $M_2^{-1}M_1 \in B$, og dermed er $M_1B = M_2B$.