

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

UNDERVEISEKSAMEN I: MAT1300 – ANALYSE 1.
EKSAMENSDAG: TORSDAG 17/3, 2005.
TID FOR EKSAMEN: KL. 13.30–16.30.
VEDLEGG: INGEN.
TILLATTE HJELPEMIDLER: INGEN.

OPPGAVESETTET ER PÅ 2 SIDER.

Alle svar må begrunnes.

Oppgave 1. La c være et reelt tall. Definer en følge x_n i $\mathbb{R}$ ved

$$x_1 = c$$
$$x_{n+1} = x_n + (1 - x_n)x_n$$

for $n = 1, 2, 3, \dots$

- a) Anta først at $0 < c < 1$.
 - (i) Vis ved induksjon at $0 < x_n < 1$ for alle n .
 - (ii) Vis så at $\{x_n\}$ konvergerer og finn $L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
- b) Anta så at $c < 0$.
 - (i) Vis ved induksjon at følgen da er nedtil monoton.
 - (ii) Er følgen konvergent?
- c) Finn alle verdier av c slik at følgen er konvergent og finn de tilsvarende verdier av grensen L .

Oppgave 2. Definer en funksjon f på området

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < ax\},$$

der $0 < a < 1$ ved

$$f(x, y) = \frac{1}{x - y}$$

- a) Vis at det finnes en konstant a_∞ slik at for alle $\varepsilon > 0$ finnes en $R > 0$ slik at $(x, y) \in D$ og $\|(x, y)\| > R$ impliserer at $|f(x, y) - a_\infty| < \varepsilon$. (Vi sier at $\lim_{\|(x, y)\| \rightarrow \infty} f(x, y) = a_\infty$.)
Finn a_∞ .
- b) Hva er tillukningen $\bar{D}$ til D ? Vis at f kan utvides til en kontinuertlig funksjon på $\bar{D} \setminus \{(0, 0)\}$.
- c) (i) Er utvidelsen i b) uniformt kontinuertlig på $\bar{D} \setminus B_\varepsilon((0, 0))$ hvis $\varepsilon > 0$? Her er
$$B_\varepsilon((0, 0)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| < \varepsilon\}$$
 - (ii) Er f selv uniformt kontinuertlig på D ?

Oppgave 3. La $(V, \|\cdot\|)$ være et normert vektorrom

- a) Definer hva det betyr at en undermengde A av V er henholdsvis
 - (i) lukket,
 - (ii) kompakt.
- b) Bevis at hvis A er en lukket undermengde av V og C er en kompakt undermengde, så er $A + C = \{a + c \mid a \in A \text{ og } c \in C\}$ lukket.
- c) Bevis at hvis A og C begge er kompakte, så er $A + C$ kompakt.

SLUTT