

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT 1300 — Analyse 1.

Eksamensdag: Mandag 2. juni 2008.

Tid for eksamen: 9.00 – 12.00.

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Merk: Alle svar skal begrunnes!

Oppgave 1.

- a) La $\mathcal{C} = \mathcal{C}[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ være det normerte vektorrommet av kontinuerlige funksjoner på intervallet $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, med sup-normen $\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]} |f(t)|$.
Vis at formelen

$$T(y)(t) = \frac{\pi}{3} + \int_0^t \sin(y(s) + s) ds$$

definerer en kontraksjon $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$.

- b) Forklar hvordan vi kan bruke resultatet i (a) til å vise at differensial-ligningen

$$y'(t) = \sin(y + t)$$

har en entydig løsning $y(t)$ definert for $t \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, slik at $y(0) = \frac{\pi}{3}$.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

- a) Hva betyr det at et metrisk rom (X, d) har Bolzano-Weierstrass egenskapen? Hvilke delmengder av $\mathbb{R}^m$ har denne egenskapen?
- b) La (X, d) og (Y, ρ) være metriske rom, der X har Bolzano-Weierstrass egenskapen. Vis at hvis $f : X \rightarrow Y$ er kontinuert og surjektiv må (Y, ρ) også ha Bolzano-Weierstrass egenskapen.

Oppgave 3.

La $\mathcal{S}$ være mengden av alle begrensede reelle følger $a = \{a_j\}_j$, $j = 1, 2, \dots$ (Dvs. $|a_j| \leq K$ for alle j , for en konstant K .) $\mathcal{S}$ er et vektorrom med de vanlige, elementvise operasjonene, og $\|a\|_1 = \sum_j |a_j|$ definerer en norm på $\mathcal{S}$. (Dette trenger du ikke vise.) La $\mathcal{S}_1$ være det normerte vektorrommet $(\mathcal{S}, \|\cdot\|_1)$.

- a) Vis at formelen

$$\|a\|_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|a_j|}{2^j}$$

også definerer en norm på $\mathcal{S}$.

- b) La $\mathcal{S}_2$ være det normerte vektorrommet $(\mathcal{S}, \|\cdot\|_2)$. Vis at identitetsavbildningen $a \mapsto a$ er kontinuert som avbildning $\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$.
- c) For hvert naturlig tall n lar vi nå $a(n) = \{a_j(n)\}_j \in \mathcal{S}$ være følgen definert ved

$$a_j(n) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } j = n \\ 0 & \text{hvis } j \neq n \end{cases}$$

Vis at følgen $\{a(n)\}_n$ er Cauchy i $\mathcal{S}_2$ men ikke i $\mathcal{S}_1$.

Er identitetsavbildningen $\mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1$ kontinuert?

Oppgave 4.

- a) La X, Y, Z og W være delmengder av normerte vektorrom. Anta at $f_n : Y \rightarrow Z$ er en følge av kontinuerte funksjoner som konvergerer uniformt mot $f : Y \rightarrow Z$, og anta at $g : Z \rightarrow W$ er uniformt kontinuert.
Vis at $g \circ f_n$ konvergerer uniformt mot $g \circ f : Y \rightarrow W$.

(Fortsettes side 3.)

- b) La $h : X \rightarrow Y$ være en funksjon. Hva er betingelsene på h for at $f_n \circ h$ skal konvergere uniformt mot $f \circ h : X \rightarrow Z$?
- c) La $F_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$ være definert ved

$$F_n(x) = \arctan\left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)$$

Vis at følgen F_n er uniformt konvergent. Hva er grensen?

SLUTT