Modellsvar til eksamen i Mat 1300, 6 Juni 05

Oppgave 1

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{når } 0 \le x < \frac{1}{n+1} \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{når } \frac{1}{n+1} \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{når } \frac{1}{n} < x < 1 \end{cases}$$

for $n = 1, 2, 3, \ldots$

(a) Vi ser lett fra definisjonen at

$$\sum_{n=1}^{m} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{når } 0 \le x \le \frac{1}{m+1} \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{når } \frac{1}{m+1} \le x \le 1 \end{cases}$$

Hvis $x > 0$ er $x \le \frac{1}{m+1}$ for store m, så

$$\sum_{n=1}^{m} f_n(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{for } m \geq \frac{1}{x} - 1$$

Hvis $x = 0$ er $\sum_{n=1}^{m} f_n(0) = 0$ ~~[illegible]~~ for alle m. Dermed ~~konvergerer~~ rekken punktvis og

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x = 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{for } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

(b) Fra (a) følger at

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{m} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x = 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{for } 0 < x < \frac{1}{m+1} \\ 0 & \text{for } \frac{1}{m+1} \le x < 1 \end{cases}$$

så $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n - \sum_{n=1}^{m} f_n \right\|_\infty = 1 \not\to 0$ og rekken konvergerer ~~ikke~~ uniformt

(c) Vi har

$$|f_n(x)| = \begin{cases} 0 & \text{når } 0 \le x < \frac{1}{n+1} \\ |\sin(\frac{1}{x})| & \text{når } \frac{1}{n+1} \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{når } \frac{1}{n} < x < 1 \end{cases}$$

for $n = 1, 2, 3, \cdot$, så ved samme argument som i (a) konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$

mot $\begin{cases} 0 & \text{for } x = 0 \\ |\sin(\frac{1}{x})| & \text{for } 0 < x \le 1 \end{cases}$

i.e. rekken konvergerer absolutt for alle x

(d) Da f_n er kontinuerlig i $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ og 0 utenfor dette intervallet eksisterer

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

og

$$\sum_{n=1}^{m} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_{\frac{1}{m+1}}^{1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

Da $|\sin(\frac{1}{x})|$ er begrenset av 1 i $\langle 0, \frac{1}{m+1} \rangle$

følger ved å bruke øvre og nedre

trappefunksjonen at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_{\frac{1}{m+1}}^{1} \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx$$

den alle grensene eksisterer

<u>Oppgave 2</u> Anta at (f_n) er en følge av funksjoner på et kompakt intervall som K som er ekvikontinuerlig i hvert punkt x i K og konvergerer mot f i ethvert punkt x

(a) For å vise at (f_n) er uniformt ~~ekvikontinuerlig på K kan vi bruke beviset av Prop 8.6.5 i DD: Hvis (f_n) ikke ekvikont finnes $\varepsilon > 0$ slik at definisjonen av ekvikontinuitet i et punkt ikke gjelder, d.v.s. for hver $\delta = \frac{1}{m}$ finnes $x_m, y_m \in K$ og en $f_{n_m} \in (f_n)$~~

(a) Hvis $\varepsilon > 0$ og $x \in K$ er gitt finnes en $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ slik at

(1) $d(y,x) < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$

for alle n fordi $\{f_n\}$ er ekvikontinuerlig. Ved å la $n \to \infty$ i denne relasjonen og bruke punktvis konvergens ser vi at

(2) $d(y,x) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Da $f_n(x)$ konvergerer mot $f(x)$ finnes videre en $N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ slik at

(3) $n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Hvis nå y, n er slik at $d(y,x) < \delta$ og $n \geq N$ gjelder derfor

$$|f_n(y) - f(y)| \leq |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)|$$

$\leq \frac{\varepsilon}{3}$ p.g.a. (1)

$+ \frac{\varepsilon}{3}$ p.g.a. (3)

$+ \frac{\varepsilon}{3}$ p.g.a. (2)

$= \varepsilon$ så.

$d(y,x) < \delta$ og $n \geq N$

$\Rightarrow |f_n(y) - f(y)| \leq \varepsilon$

som er påstanden

b) Vi så i a) at for alle $x \in K$ ~~[illegible]~~ og alle $\varepsilon > 0$ så finnes en åpen omegn $\mathcal{U}_x = \{y \in K \mid d(y,x) < \delta\}$ om x ~~[illegible]~~, og en $N_x \in \mathbb{N}$ slik at

$$y \in \mathcal{U}_x \;\&\; n \geq N_x \Rightarrow |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon$$

Men da K er kompakt finnes en endelig delovertdekning av $\{\mathcal{U}_x \mid x \in K\}$ som dekker K. La $\mathcal{U}_{x_1}, \ldots, \mathcal{U}_{x_m}$ være denne endelige deloverdekningen.

La $N = \max\{N_{x_1}, \dots, N_{x_m}\} \in \mathbb{N}$

Hvis $n \geq N$ og $x \in K$, så finnes en i slik at $x \in \mathcal{U}_{x_i}$ og da dessuten $N \geq N_{x_i}$ følger at

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Dermed konvergerer f_n uniformt mot f.

Oppgave 3

(a) Ligningssystemet er

$$f_1(x,y,z,u,v) = xy^2 + xzu + yv^2 - 3 = 0$$

$$f_2(x,y,z,u,v) = u^3yz + 2xv - u^2v^2 - 2 = 0$$

Dermed

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = xz = 1 \quad \text{når } x = z = 1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial v} = 2yv = 2 \quad \text{når } y = v = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u} = 3u^2yz - 2uv = 1 \quad \text{når } y = z = u = v = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial v} = 2x - 2u^2v = 0 \quad \text{når } u = v = x = 1$$

så

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} \underbrace{(1,1,1,1,1)}_{\text{Dette betyr evaluert i } (1,1,1,1,1) \text{ IKKE matriseprodukt}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

og $\det(M) = -2 \neq 0$ i $(1,1,1,1,1)$

Da alle de partielle deriverte eksisterer og er kontinuerlige følger av implisitt funksjonsteoremet at det finnes lokalt en løsning for u, v som funksjoner av x, y, z med $u(1,1,1)=1$ og $v(1,1,1)=1$.

b) For å $\frac{\partial v}{\partial y}(1,1,1)$ kan vi for eksempel derivere ligningssystemet i (a) m.h.p. y mens x, z holdes konstante. Dette gir

$$2xy + xz\frac{\partial u}{\partial y} + v^2 + y\,2v\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$3u^2\frac{\partial u}{\partial y}\,yz + u^3 z + 2x\frac{\partial v}{\partial y} - 2u\frac{\partial u}{\partial y}v^2 - u^2\,2v\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Settes her $x=y=z=u=v=1$ fåes

$$2 + \frac{\partial u}{\partial y} + 1 + 2\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$3\frac{\partial u}{\partial y} + 1 + 2\frac{\partial v}{\partial y} - 2\frac{\partial u}{\partial y} - 2\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

i.e.

$$\frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial v}{\partial y} = -3$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -1 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = \underline{\underline{-1}} \quad \text{i } (x,y,z)=(1,1,1)$$

Oppgave 4

(a) Vi ser at φ og $f = e^{\varphi}$ er kontinuerlige i x hvis og bare hvis x er irrasjonal ved argumentet i D.D. Example 5.2.10. Da mengden D av rasjonale punkter i $[0,1]$ er tellbar (D.D. Corollary 2.8.6) har D mål 0 (Spivak (LN), Theorem 3-4). Men da D er tett i $[0,1]$ har ikke D innhold 0 (ved argumentet i Spivak, Theorem 3-5)

(b) Da mengden D av diskontinuitetspunkter for f har mål 0, er f Riemann-integrerbar p.g.a. Lebesgues teorem (Spivak, Theorem 3.8 eller DD, Theorem 6.6.6)

~~(c) På grunn av formen av φ (se (a) eller Figure 5.5 i D.D.) finnes for alle $\varepsilon > 0$ en endelig delmengde E_ε av $[0,1]$, $E_\varepsilon = \{\frac{p}{q} \mid q \in \mathbb{N},\ p \in \{0,1,\dots,q\}$, p,q innbyrdes primiske, $\frac{1}{q}$ [illegible] $\}$ slik at $|f(x) - 1| <$~~

(c) På grunn av formen av φ (se (a) eller Figure 5.5 i DD) finnes for alle $\varepsilon > 0$ en endelig delmengde E_ε av $[0,1]$,

$$E_\varepsilon = \Big\{ \frac{p}{q} \;\Big|\; q \in \mathbb{N},\ p \in \{0,1,\dots,q\},$$
p og q har ingen felles faktorer,
$$\frac{1}{q} < \ln(\varepsilon + 1) \Big\}$$

slik at

$$|f(x) - 1| < \varepsilon$$

når $x \in [0,1] \setminus E_\varepsilon$. Dermed er

$$\left| \int_A (f(x) - 1)\,dx \right| \leq \int_A \varepsilon\,dx = \varepsilon$$

men da

$$\int_A (f(x) - 1)\,dx = \int_A f(x)\,dx - \int_A 1\,dx$$
$$= \int_A f(x)\,dx - 1$$

Følger at

$$\left| \int_A f - 1 \right| < \varepsilon$$

for alle $\varepsilon > 0$, så

$$\underline{\underline{\int_A f = 1}}$$