Oppgave 1

a) Anta at $\{f_n\}$ er en avtagende følge av ikke-negative, integrerbare funksjoner som konvergerer mot f. Vis at

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

b) Gi et eksempel på en avtagende følge av ikke-negative, målbare funksjoner som konvergerer mot f, men slik at likheten i a) ikke holder.

Oppgave 2

Vis at for alle integrerbare funksjoner $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ er

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n]} f \, d\mu$$

Oppgave 3

La f, g være to ikke-negative, målbare funksjoner, og anta at

$$\int_G f \, d\mu = \int_G g \, d\mu < \infty$$

for alle åpne mengder G. Vis at

$$\int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu$$

for alle $A \in \mathcal{M}$. Forklar at dette medfører at $f = g$ n-o.a.

Oppgave 4

a) Funksjonen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er definert ved

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin x^n}{x^n} & \text{hvis } x \in (0,1) \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

´ Finn $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$

b) La

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin x^n}{x^{n-1}} & \text{når } x \in [-\frac{1}{2}, 1], x \neq 0 \\ 1 & \text{når } x = 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

´ Finn $\lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu$

Oppgave 5

Anta at $\{f_n\}$ er en følge i $L^1(\mathbb{R}^d)$ som konvergere punktvis mot en funksjon f. Anta at det finnes en $C \in \mathbb{R}$ slik at $\|f_n - f_1\|_1 \leq C$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vis at $f \in L^1\mathbb{R}^d$.