Oppgave 1

a) Anta at $\{f_n\}$ er en avtagende følge av ikke-negative, integrerbare funksjoner som konvergerer mot f. Vis at

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

b) Gi et eksempel på en avtagende følge av ikke-negative, målbare funksjoner som konvergerer mot f, men slik at likheten i a) ikke holder.

Løsning: a) Siden f_1 er integrerbar, kan vi bruke dominert konvergensteorem med f_1 som den dominerende funksjonen. Dermed er

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$$

b) La $f_n = \mathbf{1}_{[n,\infty)}$. Da er $f = \lim_{n\to\infty} f_n = 0$, og vi har

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \infty$$

og

$$\int f \, d\mu = \int 0 \, d\mu = 0$$

Oppgave 2

Vis at for alle integrerbare funksjoner $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ er

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n]} f \, d\mu$$

Løsning: Vi bruker dominert konvergensteorem med $|f|$ som den dominerende funksjonen. Hvis $f_n = \mathbf{1}_{[-n,n]} f$, har vi da

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n]} f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$$

Oppgave 3

La f, g være to ikke-negative, målbare funksjoner, og anta at

$$\int_G f \, d\mu = \int_G g \, d\mu < \infty$$

for alle åpne mengder G. Vis at

$$\int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu$$

for alle $A \in \mathcal{M}$. Forklar at dette medfører at $f = g$ n-o.a.

Løsning: La A være en målbar mengde. Ifølge Proposition 4.3.5 finnes det for hver $n \in \mathbb{N}$ en åpen mengde O_n slik at $A \subset O_n$ og $\mu(O_n \setminus A) < \frac{1}{n}$. Lar vi

$$G_n = \bigcap_{k=1}^{n} O_k$$

får vi en *avtagende* følge av åpne mengder slik at $A \subset G_n$ og $\mu(G_n \setminus A) < \frac{1}{n}$. Dette betyr at $\mathbf{1}_{G_n} f$ og $\mathbf{1}_{G_n} g$ er to avtagende følger som konvergerer n.o.a mot henholdsvis $\mathbf{1}_A f$ og $\mathbf{1}_A g$. Bruker vi n.o.a.-varianten av dominert konvergensteorem (Exercise 4.7.8) med h.h.v. $\mathbf{1}_{G_1} f$ og $\mathbf{1}_{G_1} g$ som dominerende funksjoner, får vi

$$\int_A f\, d\mu = \int \mathbf{1}_A f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \mathbf{1}_{G_n} f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{G_n} f\, d\mu$$

og

$$\int_A g\, d\mu = \int \mathbf{1}_A g\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \mathbf{1}_{G_n} g\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{G_n} g\, d\mu$$

Siden $\int_{G_n} f\, d\mu = \int_{G_n} g\, d\mu$ for alle $n \in \mathbb{N}$, følger det at

$$\int_A f\, d\mu = \int_A g\, d\mu$$

Det gjenstår å vise at $f = g$ n.o.a. Anta ikke, da har mengden $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq g(x)\}$ positivt mål. Siden

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq g(x)\} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \geq g(x) + \frac{1}{n}\} \right) \cup$$

$$\cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^d \mid g(x) \geq f(x) + \frac{1}{n}\} \right)$$

må det finnes en n slik at enten

$$A_n = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \geq g(x) + \frac{1}{n}\}$$

eller

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^d \mid g(x) \geq f(x) + \frac{1}{n}\}$$

har positivt mål. La oss anta det er A_n (argumentet i det andre tilfellet er helt tilsvarende). Siden

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_n \cap (-k, k)^d),$$

finnes det en $k \in \mathbb{N}$ slik at $A_n^k = A_n \cap (-k,k)^d$ har positivt mål. Da er $\int_{A_n^k} f\,d\mu$ og $\int_{A_n^k} g\,d\mu$ endelige, og vi har

$$\int_{A_n^k} f\,d\mu - \int_{A_n^k} g\,d\mu = \int_{A_n^k} (f-g)\,d\mu \geq \int_{A_n^k} \frac{1}{n}\,d\mu = \frac{1}{n}\mu(A_n^k) > 0$$

Dermed har vi fått selvmotsigelsen vi var på jakt etter.

Oppgave 4

a) Funksjonen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er definert ved

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin x^n}{x^n} & \text{hvis } x \in (0,1) \\ \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

´ Finn $\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu$

b) La

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin x^n}{x^{n-1}} & \text{når } x \in [-\frac{1}{2}, 1], x \neq 0 \\ \\ 1 & \text{når } x = 0 \\ \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

´ Finn $\lim_{n\to\infty} \int g_n\,d\mu$

Løsning: a) Funksjonen

$$h(u) = \begin{cases} \frac{\sin u}{u} & \text{når } u \neq 0 \\ \\ 1 & \text{når } u = 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig og avtagende på intervallet $[0,1)$. Det betyr at $f_n(x) = h(x^n)$ vokser mot 1 når $n \to \infty$. Ved monoton konvergensteorem er dermed

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)} f_n\,d\mu = \int_{(0,1)} \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu = \int_{(0,1)} 1\,d\mu = 1$$

b) Legg merke til at $g_n(x) = xh(x^n)$. Dette betyr at $g_n(x) \to x$ for alle x i $[-\frac{1}{2}, 1]$ unntatt $x = 1$ (som ikke spiller noen rolle siden et punkt har mål 0). Siden $|g_n(x)| = |xh(x^n)| \leq |x|$, kan vi bruke dominert konvergensteorem med $g(x) = |x|$ som dominerende funksjon. Dermed er

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-\frac{1}{2},1]} g_n\,d\mu = \int_{[-\frac{1}{2},1]} \lim_{n\to\infty} g_n\,d\mu = \int_{[-\frac{1}{2},1]} x\,d\mu = \frac{3}{8}$$

Oppgave 5

Anta at $\{f_n\}$ er en følge i $L^1(\mathbb{R}^d)$ som konvergere punktvis mot en funksjon f. Anta at det finnes en $C \in \mathbb{R}$ slik at $\|f_n - f_1\|_1 \leq C$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vis at $f \in L^1\mathbb{R}^d$.

Løsning: Observer først at det holder å vise at $f - f_1$ ligger i $L^1(\mathbb{R}^d)$; siden $L^1(\mathbb{R}^d)$ er et vektorrom, medfører nemlig dette at $f = (f - f_1) + f_1$ ligger i $L^1(\mathbb{R}^d)$. Følgen $\{f_n - f_1\}$ konvergerer punktvis mot $f - f_1$, og ved Fatous lemma har vi:

$$\int |f - f_1| \, d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} |f_n - f_1| \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int |f_n - f_1| \, d\mu =$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \|f_n - f_1\|_1 \leq C$$

Dette viser at $f - f_1 \in L^1(\mathbb{R}^d)$.