25/4.

5.5.1. Anta at $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ er enkel. Vis at definisjonene i 5.4.1 og 5.5.1 av $\int f\,d\mu$ er de samme.

Svar:

5.4.1 $\int_{①} f\,d\mu = \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i)$

5.5.1. $\int_{②} f\,d\mu = \sup\{\int_{①} g\,d\mu \mid g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+ \text{ er enkel og } g \leq f\}$.

Siden f selv er med i mengden over, følger det at $\int_{②} f\,d\mu \geq \int_{①} f\,d\mu$. Men Prop 5.4.5 gir at $\int_{①} f\,d\mu \geq \int_{①} g\,d\mu$ for alle slike g og det gir $\int_{①} f\,d\mu \geq \int_{②} f\,d\mu$.

5.5.3 Hvis $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ er målbar, så er

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) \geq a\}) \leq \frac{1}{a}\int f\,d\mu \quad \text{for alle } a > 0.$$

Bevis: $A_a = \{x \in X \mid f(x) \geq a\}$ er målbar og hvis $g = a\mathbb{1}_{A_a}$, så er g en enkel funksjon og $g \leq f$. Da er

$$\int f\,d\mu \geq \int g\,d\mu = a\mu(A_a).$$ Dette gir ulikheten over.

5.5.5 Anta at $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ er målbar.

a) Hvis A, B er målbare og $A \subset B$, så er

$$\int_A f\,d\mu \leq \int_B f\,d\mu.$$

Bevis: Vi har da $\mathbb{1}_A f \leq \mathbb{1}_B f$, så Prop. 5.5.5 (iii) gir

$$\int_A f\,d\mu = \int \mathbb{1}_A f\,d\mu \leq \int \mathbb{1}_B f\,d\mu = \int_B f\,d\mu$$

b) Hvis A og B er disjunkte målbare mengder, så er

$$\int_{A\cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu$$

Bevis: Vi har da $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$, så Prop 5.5.5. (ii) gir

$$\int_{A\cup B} f\,d\mu = \int \mathbb{1}_{A\cup B} f\,d\mu = \int (\mathbb{1}_A f + \mathbb{1}_B f)\,d\mu = \int \mathbb{1}_A f\,d\mu + \int \mathbb{1}_B f\,d\mu$$

$$= \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu$$

c) $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definert ved $\nu(A) = \int_A f\,d\mu$ er et mål.

Bevis: $\nu(\emptyset) = 0$ siden $\mathbb{1}_\emptyset \equiv 0$.

La så $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en disjunkt følge i $\mathcal{A}$ og $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Hvis $f_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k} f$, så vil er $\{f_n\}$ en voksende følge og $\lim f_n = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_k} f = \mathbb{1}_A f$, så det monotone konvergensteoremet gir

$$\nu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \int \mathbb{1}_A f\,d\mu = \lim \int f_n\,d\mu = \lim \int \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k} f\,d\mu$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int \mathbb{1}_{A_k} f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \nu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k).$$

5.5.6 Hvis $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ er integrerbar, så er f endelig n.o.

Bevis:

La $A_\infty = \{x \mid f(x) = +\infty\}$. Hvis $\mu(A_\infty) > 0$, la $g_n = n \mathbb{1}_{A_\infty}$. Da er $g_n \leq f$, så

$$\int f \, d\mu \geq \int g_n \, d\mu = \int n \mathbb{1}_{A_\infty} \, d\mu = n \mu(A_\infty) \to \infty \quad \text{når } n \to \infty.$$

Dette strider mot at f er integrerbar.

5.5.7 Hvis μ er Lebesgue målet på $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ er målbar, så er $\lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n]} f \, d\mu = \int f \, d\mu$

Bevis:

Hvis $f_n = \mathbb{1}_{[-n,n]}$, så er $\{f_n\}$ en voksende følge målbare funksjoner og $\lim f_n = f$. Monoton konv. teorem gir da

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n]} f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

5.5.8 Hvis μ er Lebesgue-målet på $\mathbb{R}$ og $A \subset \mathbb{R}$ er målbar, så er

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \sum^{n} \frac{x^{2k}}{k!} \, d\mu = \int_A e^{x^2} \, d\mu$$

Bevis:

Hvis $f_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{k!}\right) \mathbb{1}_A$, så er $\{f_n\}$ en voksende følge av målbare funksjoner og $\lim f_n = e^{x^2} \cdot \mathbb{1}_A$. Mon. konv. teorem gir

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \sum^{n} \frac{x^{2k}}{k!} \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \left(\sum^{n} \frac{x^{2k}}{k!}\right) \mathbb{1}_A \, d\mu = \int e^{x^2} \mathbb{1}_A \, d\mu = \int_A e^{x^2} \, d\mu$$

5.5.11 a) Hvis $u_n : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ er målbare funksjoner, så er

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} u_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n \, d\mu$$

Bevis: Hvis $f_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$, så er $\{f_N\}$ en voksende følge målbare funksjoner og $\lim f_N = \sum^{\infty} u_n$. Monoton konv. teorem gir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int u_n \, d\mu = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int u_n \, d\mu = \lim_{N\to\infty} \int \sum^{N} u_n \, d\mu = \lim_{N\to\infty} \int f_N \, d\mu$$

$$= \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right) d\mu.$$

b) Hvis $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ er målbar, $\{B_n\}$ en disjunkt følge målbare mengder med union B, så er

$$\int_B f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} f \, d\mu$$

Bevis: Hvis vi setter $u_n = f \cdot \mathbb{1}_{B_n}$, så er $\sum^{\infty} u_n = f \cdot \mathbb{1}_B$ og resultatet følger fra a).

5.5.12 Hvis $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ er målbar, $\{A_n\}$ en voksende følge målbare mengder med union A. Da er

$$\int_A f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f \, d\mu$$

Bevis: Da er $f \mathbb{1}_{A_n}$ en voksende følge målbare funksjoner med grense $f \mathbb{1}_A$, så monoton konv. teoremet gir

$$\lim \int_{A_n} f \, d\mu = \lim \int f \mathbb{1}_{A_n} d\mu = \int f \mathbb{1}_A \, d\mu = \int_A f \, d\mu.$$

5.5.13 Hvis $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ er en voksende følge målbare funksjoner og $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ n.o., så er

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu .$$

Bevis: Hvis N er en mengde med mål 0, så gjelder for alle målbare $g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$

$$\int g \, d\mu = \int g \left(1\!\!1_{X \setminus N} + 1\!\!1_N \right) d\mu = \int_{X\setminus N} g \, d\mu + \int_N g \, d\mu = \int_{X \setminus N} g \, d\mu$$

siden integralet over en mengde med mål 0 er 0.
Hvis $N = \{ x \in X \mid f_n(x) \text{ konvergerer ikke mot } f(x) \}$, så har N mål null og $\lim 1\!\!1_{X\setminus N} f_n = 1\!\!1_{X \setminus N} f$ i hele X, altså

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{X\setminus N} f_n \, d\mu = \int_{X\setminus N} f \, d\mu = \int f \, d\mu .$$

5.6.1 Hvis f er målbar, så er også f_+ og f_- målbare.

Bevis:

$$\{ x \mid f_+(x) < r \} = \begin{cases} \{ x \mid f(x) < r \} & \text{hvis } r > 0 \\ \emptyset & \text{hvis } r \leq 0 \end{cases}$$

$$\{ x \mid f_-(x) < r \} = \begin{cases} \{ x \mid f(x) > -r \} & \text{hvis } r > 0 \\ \emptyset & \text{hvis } r \leq 0 \end{cases}$$

Alle disse mengdene er målbare.

5.6.4 Anta at $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ er målbar.

a) Hvis f er integrerbar over en mengde A (dvs. $f \mathbb{1}_A$ er integrerbar) og A_n er en voksende følge målbare mengder med union A, så er

$$\lim_{n \to \infty} \int_{A_n} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu$$

Bevis: Da er $f \cdot \mathbb{1}_A$ integrerbar og $|f \mathbb{1}_{A_n}| \leq |f \mathbb{1}_A|$, så Lebesgue's dominerte konvergens teorem (LDKT) gir

$$\lim_{n \to \infty} \int_{A_n} f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f \cdot \mathbb{1}_{A_n} d\mu = \int \lim f \cdot \mathbb{1}_{A_n} d\mu =$$

$$\int f \mathbb{1}_A \, d\mu = \int_A f \, d\mu.$$

b) Hvis $\{B_n\}$ er en avtagende følge målbare mengder med snitt B og f er integrerbar over B_1, så er

$$\lim_{n \to \infty} \int_{B_n} f \, d\mu = \int_B f \, d\mu$$

Bevis: Da er $\lim f \mathbb{1}_{B_n} = f \mathbb{1}_B$ i hele X og $|f \mathbb{1}_{B_n}| \leq |f \mathbb{1}_{B_1}|$ som er integrerbar. Altså gir LDKT:

$$\lim \int_{B_n} f \, d\mu = \lim \int f \mathbb{1}_{B_n} d\mu = \int f \mathbb{1}_B \, d\mu = \int_B f \, d\mu.$$

5.6.5. Hvis f er integrerbar over A, A_n en disjunkt følge målbare mengder med union A, så er

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \, d\mu$$

Bevis:

La $g_k = \sum_{n=1}^{k} 1\!\!1_{A_n} f$. Da er $|g_k| \leq |1\!\!1_A f|$ og $1\!\!1_A f$ er integrerbar. Videre er $\lim_{k\to\infty} g_k = 1\!\!1_A f$. LDKT gir da:

$$\int_A f\,d\mu = \int f 1\!\!1_A\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int \sum_{n=1}^{k} 1\!\!1_{A_n} f\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_{A_n} f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f\,d\mu.$$

5.6.6. Anta at $f: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ er integrerbar og la $A_n = \{x \in X \mid f(x) \geq n\}$. Da vil $\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f\,d\mu = 0$.

Bevis:

Vi har $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \in X \mid f(x) = +\infty\}$. I følge oppgave 5.5.6 har vi $\mu(A) = 0$. Videre er $\{A_n\}$ en avtagende følge målbare mengder og f er integrerbar over A_1, så oppgave 5.6.4 b) gir

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu = 0 \quad \text{siden } \mu(A) = 0.$$

5.6.7 Hvis $g: X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ er integrerbar, f_n en følge målbare funksjoner slik at $f_n \to f$ n.o. og $|f_n(x)| \leq g(x)$ n.o. for alle n, så er

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu$$

Bevis: La $A_0 = \{x \mid f_n(x) \text{ ikke konvergerer mot } f(x)\}$

$$A_n = \{x \mid |f_n(x)| > g(x)\}$$

Da er $\mu(A_n) = 0$ for alle n, så hvis $N = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, så

er $\mu(N) = 0$. På $X \setminus N$ holder betingelsene i LDKT, så vi har:

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{X\setminus N} f_n \, d\mu = \int_{X\setminus N} f \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

5.6.8. (Se oppgaveformulering i boka).

Svar:

Det er nok å vise at

$$\lim_{n\to 0} \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} = \int \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \, d\mu(y)$$

for alle følger $\{h_n\}$, $h_n \neq 0$ og $h_n \to 0$. og alle $x \in \mathbb{R}$.

La $x \in \mathbb{R}$ være fast.

La $g_n(y) = \dfrac{g(x+h_n, y) - g(x,y)}{h_n}$. Da fins c mellom

x og $x + h_n$ slik at $g_n(y) = \frac{\partial g}{\partial x}(c, y)$. Altså har vi at $|g_n(y)| \leq h(y)$ som er integrerbar. Dessuten vil $g_n(y) \to \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ for alle y. LDKT gir da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} = \lim_{n\to\infty} \int \frac{g(x+h_n, y) - g(x,y)}{h_n} \, d\mu(y)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int g_n(y) \, d\mu(y) = \int \lim g_n(y) \, d\mu(y) = \int \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \, d\mu(y).$$