Oppgaver 14/2 (X,d) alltid metrisk rom

2.6.1 Hvis $D \subset A \subset X$, så er disse ekvivalente:
(i) D er tett i A
(ii) $B(a,r) \cap D \neq \emptyset$ for alle $a \in A$ og $r > 0$.

Bevis:
(i)$\Rightarrow$(ii). At D er tett i A betyr at for alle $a \in A$ fins følge $\{x_n\}$ i D slik at $x_n \to a$. Hvis $r > 0$ betyr det at det fins $N \in \mathbb{N}$ slik at $x_n \in B(a,r)$ når $n \geq N$ (sett bare $\varepsilon = r$ i definisjonen av at $x_n \to a$). Men da er jo $x_n \in B(a,r) \cap D$, som altså er ikke-tom.
(ii)$\Rightarrow$(i) Hvis $a \in A$ og $n \in \mathbb{N}$, så er $B(a,\frac{1}{n}) \cap D \neq \emptyset$, dvs. det fins $x_n \in B(a,\frac{1}{n}) \cap D$. Det følger at $\{x_n\}$ er en følge i D og $x_n \to a$ (siden $d(x_n,a) < \frac{1}{n}$).

2.6.3 Hvis $\mathcal{I}$ er en familie åpne intervaller i $\mathbb{R}$ slik at $[0,1] \subset \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I$, så finnes endelig mange intervaller $I_1, \dots, I_n$ i $\mathcal{I}$ slik at $[0,1] \subset I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n$

Bevis:
$K = [0,1]$ er lukket og begrenset og derfor kompakt. Dermed har K den åpne overdeknings egenskapen. $\mathcal{I}$ er en åpen overdekning og har derfor en endelig deloverdekning $I_1, I_2, \dots, I_n$.

2.6.5 Anta $f: X \to Y$ kontinuerlig. Bruk den åpne overdeknings egenskapen til å vise at om $K \subset X$ er kompakt, så er $f(K)$ kompakt i Y.

Bevis:
La $\mathcal{O}$ være en åpen overdekning av $f(K)$, dvs $f(K) \subset \bigcup_{O \in \mathcal{O}} O$. Da er familien $\mathcal{O}' = \{f^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{O}\}$ en

familie åpne mengder i X siden f er kontinuerlig.
Det er klart at $\mathcal{O}'$ overdekker K. Siden K er kompakt, har $\mathcal{O}'$ en endelig deloverdekning, dvs at det fins $O_1, O_2, \cdots, O_n \in \mathcal{O}$ slik at $K \subset f^{-1}(O_1) \cup f^{-1}(O_2) \cup \cdots \cup f^{-1}(O_n)$.
Men da er $f(K) \subset O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_n$, altså er K kompakt.

<u>2.6.6</u> Anta at $K_1, K_2, \cdots, K_n$ er kompakter i X. Bruk den åpne overdekningsegenskapen til å vise at $K = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n$ er kompakt.

Bevis:

La $\mathcal{O}$ være en åpen overdekning av K. Da er $\mathcal{O}$ også en åpen overdekning av hver K_i. Siden K_i er kompakt, fins endelig mange $O_1^i, O_2^i, \cdots, O_{k_i}^i$ mengder i $\mathcal{O}$ slik at $K_i \subset O_1^i \cup O_2^i \cup \cdots \cup O_{k_i}^i = \bigcup_{j=1}^{k_i} O_j^i$

Men da vil de endelig mange mengdene

$O_1^1, O_2^1, \cdots, O_{k_1}^1, O_1^2, O_2^2, \cdots, O_{k_2}^2, \cdots, O_1^n, O_2^n, \cdots, O_{k_n}^n$

dekke K, dvs $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{k_i} O_j^i$

<u>2.6.8</u> Anta $K \subset X$. Da er disse ekvivalente:

(i) K er kompakt

(ii) Hvis $\mathcal{F}$ er en familie lukkede mengder med den <u>endelige snitt egenskapen</u> over K (dvs. $K \cap F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n \neq \emptyset$ for alle <u>endelige</u> familier $F_1, \cdots, F_n$ i $\mathcal{F}$, så er

$$K \cap \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$$

(som vi godt kan kalle den <u>uendelige</u> snittegenskapen)

Bevis: Hovedpoenget i beviset er identiteten

$$K \cap \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = K \setminus \bigcup_{F\in\mathcal{F}} F^c$$

som gjelder for en vilkårlig familie $\mathcal{F}$ av delmengder.
Ved teorem 2.6.6 er det nok å vise at (ii) er ekvivalent med

(i)' K har den åpne overdeknings egenskapen, dvs. enhver åpen overdekning $\mathcal{O}$ av K har en endelig deloverdekning $O_1, \dots, O_n$.

Hvis $\mathcal{F}$ er en familie lukkede mengder, så er $\mathcal{O} = \{F^c\}_{F\in\mathcal{F}}$ en familie åpne mengder. Hvis $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$ og $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{O}$ er komplementære, dvs. $O_i = F_i^c$, så er

$$K \cap F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n = K \setminus (O_1 \cup O_2 \cup \dots \cup O_n)$$

Dette gir:

$\mathcal{F}$ har den endelige snittegenskapen over K

$$\Updownarrow$$

$\mathcal{O}$ har ingen endelig deloverdekning av K.

Nå blir beviset lett:

(i)' ⇒ (ii) Hvis $\mathcal{F}$ har den endelige snitt egenskapen over K, så har $\mathcal{O}$ ingen endelig deloverdekning av K. (i)' gir at $\mathcal{O}$ ikke er en overdekning av K, dvs. $K \cap \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = K \setminus \bigcup_{O\in\mathcal{O}} O \neq \emptyset$.

(ii) ⇒ (i)' La $\mathcal{O}$ være en åpen overdekning av K. Hvis $\mathcal{O}$ ikke har en endelig deloverdekning, så har $\mathcal{F}$ den endelige snitt egenskapen. Vi har da $K \cap \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = K \setminus \bigcup_{O\in\mathcal{O}} O = \emptyset$, hvilket strider mot (ii).

2.6.7 Bruk den åpne overdekningsegenskapen til å vise at en lukket delmengde F av en kompakt mengde K også er kompakt.

Bevis:

La $\mathcal{O}$ være en overdekning av F. $U := F^c$ er åpen og $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cup \{U\}$ er da en overdekning av K. Altså fins endelig mengde $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{O}'$ som overdekker K. Vi tar vekk U hvis den er med og får da en endelig deloverdekning i $\mathcal{O}$ av F.

- Hvis man skal vise at $f: X \to Y$ ikke er uniformt kontinuerlig, må man vise:

  Det fins $\varepsilon > 0$ slik at for alle $\delta > 0$ fins $x, y \in X$ slik at $d_X(x,y) < \delta$ men $d_Y(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$.

  Ofte har vi stor frihet i valg av ε og vi kan prøve med $\varepsilon = 1$.

3.1.1 $f(x) = x^2$ er ikke uniformt kontinuerlig.

Bevis: La $\varepsilon = 1$ og gitt $\delta > 0$. La $x = y + \frac{1}{2}\delta$, så $|x-y| = \frac{1}{2}\delta < \delta$. Videre er

$$f(x) - f(y) = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = (2y + \tfrac{1}{2}\delta) \cdot \tfrac{1}{2}\delta \geq y\delta.$$

Hvis vi velg y så stor at $y\delta \geq 1$ (dvs. $y \geq 1/\delta$), ser vi at f ikke er uniformt kontinuerlig.

3.1.2 $f: (0,1) \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = \frac{1}{x}$ er ikke uniformt kontinuerlig.

Bevis: La $\varepsilon = 1$ og gitt $\delta > 0$. Vi kan anta $\delta < 1$. Velg $x = \frac{1}{2}\delta$ og $y = \delta$, så $|x-y| = \frac{1}{2}\delta < \delta$. Videre er

$$f(x) - f(y) = \frac{2}{\delta} - \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta} > 1.$$

<u>3.1.3</u> $\mathcal{F} = \{ f : X \to Y \mid d_Y(f(x), f(y)) \leq K d_X(x,y) \}$ er en ekvikontinuerlig familie.

Bevis:

Gitt $\varepsilon > 0$. Hvis $d_X(x,y) < \delta$, så er

$$d_Y(f(x), f(y)) < K\delta.$$

Vi kan da bare velge $\delta > 0$ slik at $K\delta < \varepsilon$, dvs. $\delta < \frac{\varepsilon}{K}$.

<u>3.1.4</u> Hvis $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er deriverbar, f' er begrenset (dvs. $|f'(x)| \leq K$ for alle $x \in \mathbb{R}$), så er f uniformt kontinuerlig.

Bevis:

Dette bruker <u>middelverdisetningen</u>: Hvis $y < x$, så fins $\eta \in (y, x)$ slik at

$$f(x) - f(y) = f'(\eta)(x - y)$$

La nå $\varepsilon > 0$. Hvis $|x - y| < \delta$ har vi

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\eta)(x-y)| = |f'(\eta)| \cdot |x - y| \leq K\delta$$

Hvis vi nå velger $\delta > 0$ slik at $K\delta < \varepsilon$, er vi fremme.

<u>3.2.1</u> $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f_n(x) = \frac{x}{n}$ konvergerer punktvis mot 0, men ikke uniformt.

Bevis: $f_n(x) = \frac{x}{n} \to 0$ når $n \to \infty$ for alle x.

$\sup\{ |f_n(x)| = \frac{|x|}{n} : x \in \mathbb{R} \} = \infty$ for alle n. Prop 3.2.3 gir at f_n ikke går mot 0 uniformt.

3.2.3 $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f_n(x) = e^{-x}\left(\frac{x}{n}\right)^{ne}$

a) f_n konvergerer punktvis mot 0.

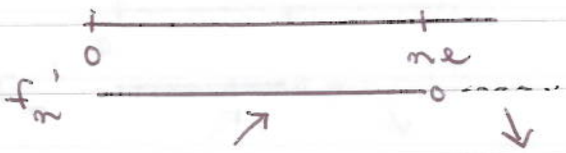
Bevis: Dette følger av at for gitt x, vil $\frac{x}{n} \to 0$ når $n \to \infty$ og at potensen $ne > 1$.

b) Finn maks for f_n. Konvergerer f_n uniformt?

Svar:

$$f_n' = -e^{-x}\left(\frac{x}{n}\right)^{ne} + e^{-x}\cdot ne \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^{ne-1}\cdot \frac{1}{n}$$

$$= e^{-x}\left(\frac{x}{n}\right)^{ne-1}\left(e - \frac{x}{n}\right) = 0 \quad \text{når } x = ne$$



f_n har maks i $x = ne$

$$f_{n,\text{maks}} = e^{-ne}\cdot e^{ne} = 1$$

og $f_n \geq 0$. Altså er

$\sup\{|f_n(x)| : x \in [0,\infty)\} = 1$. og det følger av Prop. 3.2.3 at f_n ikke går uniformt mot 0.

3.2.4 $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$

a) f_n konvergerer punktvis mot $f(x) = \ln x$

Bevis:

Her må vi gjøre litt MAT1100 regning:

$$\lim_{n\to\infty} n(x^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \underset{a=\frac{1}{n}}{=} \lim_{a\to 0^+} \frac{x^a - 1}{a} = (\text{L'Hopital})$$

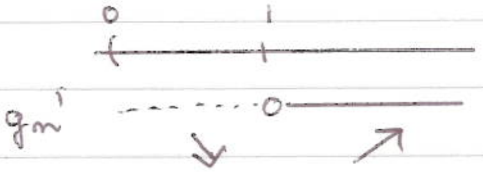
$$\lim_{a\to 0^+} \frac{(\ln x)\cdot x^a}{1} = \ln x$$

b) f_n konvergerer uniformt mot f i alle intervaller $I_m = [\frac{1}{m}, m]$, $m \in \mathbb{N}$, men ikke i $(0,\infty)$

Bevis: Vi må se på avviket fra grensen:

$$g_n(x) = f_n(x) - f(x) = n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right) - \ln x$$

$$g_n'(x) = n \cdot \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$



g_n har minimum i $x = 1$

$g_n(1) = 0$

I intervallet $I_n = [\frac{1}{n}, n]$ er derfor $g_n \geq 0$ og har maks enten i $\frac{1}{n}$ eller i n. Dvs.

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in I_n\} = \max\{g_n(\tfrac{1}{n}), g_n(n)\} \to 0$$

når $n \to \infty$ siden g_n går punktvis mot 0.

Fra MAT1100 vet vi også at potenser av x vokser fortere enn $\ln x$. Dette gir

$$\lim_{x \to +\infty} g_n(x) = +\infty$$

Altså er $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in (0, \infty)\} = \infty$, så f_n konvergerer ikke uniformt i $(0, \infty)$.

<u>3.2.5</u> Hvis $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en følge kontinuerlige funksjoner, $f_n \to f$ uniformt i alle intervaller $I_k = [-k, k]$, $k \in \mathbb{N}$, så er f kontinuerlig.

Bevis:

Ved Proposisjon 3.2.4 er f kontinuerlig i alle intervaller I_k og derfor i hele $\mathbb{R}$.

3.2.9 Hvis $f_n : X \to Y$ er en følge kontinuerlige avbildninger, $f_n \to f$ uniformt i X og $x_n \in X$ en følge slik at $x_n \to x$. Da vil $f_n(x_n) \to f(x)$.
Dette er ikke nødvendigvis sant hvis f_n bare konvergerer punktvis.
Bevis:
Vi vet at f er kontinuerlig. La $\varepsilon > 0$ være gitt. Da fins $\delta > 0$ slik at $d_Y(f(y), f(x)) < \frac{1}{2}\varepsilon$ når $d(x,y) < \delta$. Siden $x_n \to x$ fins N_1 slik at $d_X(x_n, x) < \delta$ når $n \geq N_1$, dvs. $d_Y(f(x_n), f(x)) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Siden $f_n \to f$ uniformt, fins N_2 slik at $d_Y(f_n(y), f(y)) < \frac{1}{2}\varepsilon$ for alle $y \in X$. Hvis $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ har vi da

$$d_Y(f_n(x_n), f(x)) \leq d_Y(f_n(x_n), f(x_n)) + d_Y(f(x_n), f(x))$$
$$< \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

I eksempel 1, side 52, har vi at $f_n \to 0$ punktvis, $\frac{1}{2n} \to 0$, men $f_n(\frac{1}{2n}) = 1$ går ikke mot 0.