7/3

3.8.1 $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ er ingensteds tett.

Bevis: Hvis $G \subset \mathbb{R}$ er åpen, så fins $x \in G$ slik at $x \notin \mathbb{N}$.
Da fins $r > 0$ slik at $B(x-r, x+r) \cap \mathbb{N} = \emptyset$.

3.8.2 $A = \{g \in C([0,1], \mathbb{R}) \mid g(0) = 0\}$ er ingensteds tett i $C([0,1], \mathbb{R})$.

Bevis: Anta at $G \subset C([0,1], \mathbb{R})$ er åpen og $f \in G$. Da fins $R > 0$ slik at $B(f, R) \subset G$. Da er $h(t) = f(t) + \varepsilon \in G$ for alle ε med $|\varepsilon| < R$. Altså fins en $h \in G$ slik at $h(0) \neq 0$ og en $r_1 > 0$ slik at $B(h, r_1) \subset G$. Hvis $r = \min\{r_1, |h(0)|\}$, så er $B(h, r) \subset G$ og $B(h, r) \cap A = \emptyset$.

3.8.3

- En delmengde S' av en ingensteds tett mengde S er selv ingensteds tett.

Bevis:

Hvis $G \subset X$ er åpen, så fins ball $B(x, r) \subset G$ som ikke snitter S og derfor treffer ikke S'.

- En delmengde M' av en mager mengde M er mager.

Bevis:

$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ der S_i er ingensteds tett. Siden $M' \subset M$ har vi $M' = M \cap M' = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \cap M'$. Men $S_i \cap M' \subset S_i$ og er derfor ingensteds tett.

3.8.4 $S \subset X$ er ingensteds tett $\iff$ For enhver ball $B(a_0, r_0) \subset X$ fins en ball $B(x,r) \subset B(a_0,r_0)$ som ikke snitter S.

Bevis:

$\Rightarrow$ Siden $B(a_0, r_0)$ er åpen.

$\Leftarrow$ Anta at $G \subset X$ er åpen og la $a_0 \in G$. Da fins $r_0 > 0$ slik at $B(a_0, r_0) \subset G$ og derfor en ball $B(x,r) \subset B(a_0, r_0) \subset G$ som ikke snitter G.

3.8.5 $\overline{N} = N \cup \{$alle randpunkter$\}$.

a) Hvis N er ingensteds tett, så er $\overline{N}$ det også.

Bevis:

Anta at $G \subset X$ er åpen. Da fins $B(x,r) \subset G$ med $B(x,r) \cap N = \emptyset$. Men ingen punkter i $B(x,r)$ kan være randpunkter, siden en liten kule er inneholdt i $B(x,r)$ og derfor ikke snitter N. Altså er $B(x,r) \cap \overline{N} = \emptyset$.

b) Eksempel der M er mager, men ikke $\overline{M}$.

Svar:

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ er mager, men $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ siden alle reelle tall er grense for en følge av rasjonale tall. $\mathbb{R}$ er ikke mager, siden $\mathbb{R}$ er komplett. (Baire's Kategori teorem).

c) N er ingensteds tett $\iff$ $\overline{N}$ inneholder ingen åpne kuler.

Bevis:

$\overline{N}$ er lukket, så utsagnet til høyre er ekvivalent med at $\overline{N}$ er ingensteds tett. $\Rightarrow$ Følger av a), mens $\Leftarrow$ følger av at en delmengde av en ingensteds tett mengde er ingensteds tett.

3.8.6 En tellbar union $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ av magre mengder M_i er selv mager.

Bevis:

$M_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_{i,j}$, der $S_{i,j}$ er ingensteds tett. Men da er

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} S_{i,j} = \bigcup_{(i,j)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}} S_{ij}$$

Dette er en tellbar union av ingensteds tette mengder, siden $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ er tellbar.

3.8.7 Hvis $N_1, N_2, \cdots, N_k$ er ingensteds tette mengder, så er $N_1 \cup \cdots \cup N_k$ ingensteds tett.

Bevis:

Ved induksjon er det nok å vise for $k=2$. Anta at N_1 og N_2 er ingensteds tette og la $G \subset X$ være åpen. Siden N_1 er ingensteds tett fins $B(x_1, r_1) \subseteq G$ slik at $B(x_1, r_1) \cap N_1 = \emptyset$. Men $B(x_1, r_1)$ er åpen, så siden N_2 er ingensteds tett fins $B(x_2, r_2) \subset B(x_1, r_1)$ slik at $B(x_2, r_2) \cap N_2 = \emptyset$. Det følger at $B(x_2, r_2) \subset G$ og $B(x_2, r_2) \cap (N_1 \cup N_2) = \emptyset$.

3.8.9. Vi definerer $g_n \in C([0,1], \mathbb{R})$ ved

$$g_n(x) = \begin{cases} nx & \text{for } x \leq \frac{\varepsilon}{2n} \\ \frac{\varepsilon}{2} & \text{for } x \geq \frac{\varepsilon}{2n} \end{cases}$$

a) $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ er ikke ekvikontinuerlig.

Bevis:

Gitt $\delta > 0$, velg n slik at $\frac{\varepsilon}{2n} < \delta$. La $x = \frac{\varepsilon}{2n}$ og $y = 0$.
Da er $|x-y| = \frac{\varepsilon}{2n} < \delta$, men $|f(x) - f(y)| = \frac{\varepsilon}{2}$.

b) Hvis $\{h_n\}$ er en ekvikontinuerlig fölge av funksjoner i $C([0,1], \mathbb{R})$ og $k \in C([0,1], \mathbb{R})$, så er fölgen $\{h_n + k\}$ ekvikontinuerlig.

Bevis:

La $\varepsilon > 0$ være gitt. k er uniformt kontinuerlig siden $[0,1]$ er kompakt, altså fins $\delta_1 > 0$ slik at $|k(x) - k(y)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ når $|x-y| < \delta_1$. $\{h_n\}$ er ekvikontinuerlig, så det fins $\delta_2 > 0$ slik at $|h_n(x) - h_n(y)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ for alle n når $|x-y| < \delta_2$. La $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Når $|x-y| < \delta$ gjelder begge ulikhetene, så

$$|(h_n+k)(x) - (h_n+k)(y)| = |(h_n(x) - h_n(y)) + (k(x) - k(y))|$$
$$\leq |h_n(x) - h_n(y)| + |k(x) - k(y)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

c) $\{f + g_n\}$ i Lemma 3.8.8. er ikke ekvikontinuerlig.

Bevis:

I såfall, la $k = -f$. Da blir $f + g_n + k = g_n$ ekvikontinuerlig i fölge b), men dette strider mot a).

3.8.10 La $\mathbb{N}$ ha den diskrete metrikken. Da er $\mathbb{N}$ komplett og $\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}$, men dette strider ikke mot Baire's Kategori Teorem.

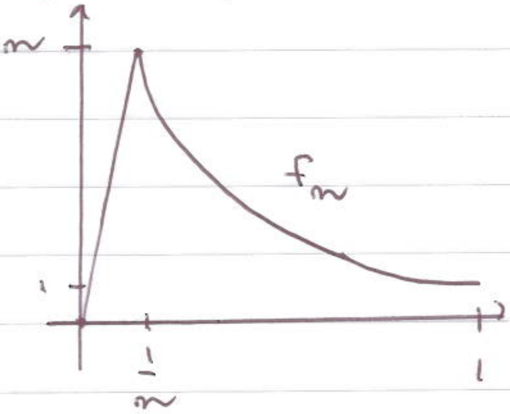
Bevis: Vi har vist at en Cauchy-fölge er konstant fra et visst ledd av, dvs. $a_n = c$ for $n \geq N$.

Da vil $a_n \to c$ og $\mathbb{N}$ er komplett. Mengdene $G = \{n\} = B(n,1)$ er åpne og derfor ikke ingensteds tette.

3.8.12 Hvis $f_n \in C([0,1],\mathbb{R})$, $f_n \to f$ punktvis i $[0,1]$, så er f begrenset i et delintervall. Finn et eksempel der f ikke er begrenset i hele $[0,1]$

Svar:

$[0,1] \in \mathbb{R}$ er lukket og derfor komplett, siden $\mathbb{R}$ er det. Videre er $\mathcal{F} = \{f_n\}$ punktvis begrenset siden f_n er punktvis konvergent. (En konvergent fölge er alltid begrenset.) Resultatet fölger nå direkte fra Prop. 3.8.6.



$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{for } x \geq \frac{1}{n} \\ n^2 x & \text{for } x \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Vi har

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{når } x > 0 \\ 0 & \text{når } x = 0 \end{cases}$$

f er ubegrenset.

- $\limsup_{n\to\infty} a_n$ = det største tallet b slik at det fins delfølge a_{n_k} av a_n med $a_{n_k} \to b$

- For å vise at $\limsup_{n\to\infty} a_n = b$, må man vise to ting:

  1) For alle $\epsilon > 0$ fins N slik at $a_n < b + \epsilon$ når $n \geq N$.

  2) For alle $\epsilon > 0$ og $n \in \mathbb{N}$ fins $k \geq n$ slik at $a_k > b - \epsilon$.

Formuler selv kravet når $b = +\infty$ eller $b = -\infty$!

- $\liminf_{n\to\infty} a_n$ = det minste tallet b slik at det fins delfølge a_{n_k} av a_n med $a_{n_k} \to b$.

- For å vise at $\liminf_{n\to\infty} a_n = b$, må man vise to ting:

  1) For alle $\epsilon > 0$ fins N slik at $a_n > b - \epsilon$ når $n \geq N$

  2) For alle $\epsilon > 0$ og $n \in \mathbb{N}$ fins $k \geq n$ slik at $a_k < b + \epsilon$

- $\liminf a_n = -\limsup(-a_n)$

<u>4.1.1</u> $a_n = (-1)^n$

a_n: $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

$\limsup a_n = 1$

$\liminf a_n = -1$.

<u>4.1.2</u> $a_n = \cos\frac{n\pi}{2}$

a_n: $0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots$

$\limsup a_n = 1$

$\liminf a_n = -1$.

4.1.5.

- $\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

(Tilfellet $\infty - \infty$ må utelukkes) Det fins eksempler der ulikheten er ekte.

Bevis:

La $\limsup a_n = A$ og $\limsup b_n = B$. Hvis $A = \infty$ eller $B = \infty$, gjelder ulikheten. Vi kan derfor anta at $A < \infty$ og $B < \infty$. Vi antar at begge er endelige. Gitt $\epsilon > 0$, så fins N_1 og N_2 slik at $a_n < A + \frac{1}{2}\epsilon$ når $n \geq N_1$ og $b_n < B + \frac{1}{2}\epsilon$ når $n \geq N_2$. Hvis $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$ har vi

$$a_n + b_n < A + \tfrac{1}{2}\epsilon + B + \tfrac{1}{2}\epsilon = A + B + \epsilon$$

Dette viser at $\limsup (a_n + b_n) \leq A + B$.

Hvis $A = -\infty$ eller $B = -\infty$, følger det på lignende måte.

Eksempel: $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n+1}$, $a_n + b_n = 0 \ \forall n$.

$\limsup (a_n + b_n) = 0$

$\limsup a_n + \limsup b_n = 1 + 1 = 2$.

- $\liminf (a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n$

Bevis:

$\liminf (a_n + b_n) = -\limsup (-a_n - b_n)$

$\geq -(\limsup(-a_n) + \limsup(-b_n))$

$= -(-\liminf a_n - \liminf b_n) = \liminf a_n + \liminf b_n$.

Eksempel som over.

- Hvis $a_n \geq 0$ og $b_n \geq 0$, så er $\limsup a_n b_n \leq \limsup a_n \cdot \limsup b_n$ (Tilfellet $0 \cdot \infty$ må utelukkes) Det fins eksempler der ulikheten er ekte.

Bevis:

A og B som før. Hvis $A = \infty$ eller $B = \infty$ gjelder ulikheten. Anta derfor $A < \infty$ og $B < \infty$ og at $\varepsilon > 0$ er gitt. Hvis $\delta > 0$, så fins N_1 og N_2 slik at $a_n < A + \delta$ når $n \geq N_1$ og $b_n < B + \delta$ når $n \geq N_2$. For $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ har vi da

$$a_n b_n < (A+\delta)(B+\delta) = AB + (A+B+\delta)\delta$$

Hvis vi nå velger $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{A+B+1}\right\}$ følger at

$$a_n b_n < AB + \varepsilon$$

Dette viser at $\limsup a_n b_n \leq AB$.

Hvis vi setter $a_n = 2^{(-1)^n}$, $b_n = 2^{(-1)^{n+1}}$ så er $a_n b_n = 2^0 = 1$, så $\limsup a_n b_n = \liminf a_n b_n = 1$

$\limsup a_n \cdot \limsup b_n = 2 \cdot 2 = 4$

$\liminf a_n \cdot \liminf b_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

4.1.6. Anta
- $a_n \ge 0$, $a_n \to a \in [0,\infty)$
- $\limsup b_n = b \in (-\infty,\infty)$

Da er $\limsup a_n b_n = ab$

Bevis:

Denne oppgaven er litt lurete fordi vi kan ha $b<0$. Man kan se på tilfellene $b \ge 0$ og $b<0$ hver for seg, eller man kan bruke dette trikset: Velg $M>0$ slik at $b+M>1$.

Anta først at $\epsilon>0$ er gitt. Hvis $\delta>0$, så fins N_1 slik at $b_n+M < b+M+\delta$ når $n \ge N_1$. Dessuten fins N_2 slik at $a-\delta < a_n < a+\delta$ når $n \ge N_2$. For $n \ge N = \max\{N_1, N_2\}$ har vi da

$$a_n b_n + a_n M = a_n(b_n+M) \le a_n(b+M+\delta)$$

$$< (a+\delta)(b+M+\delta) = ab + aM + \delta(a+b+M+\delta)$$

$$\Rightarrow a_n b_n < ab + (a-a_n)M + \delta(a+b+M+\delta) < ab + \delta(a+b+2M+\delta)$$

Hvis vi nå velger $\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{a+b+2M+1}\right\}$, så er $a_n b_n < ab + \epsilon$.

Anta så at $\epsilon>0$ og at $n \in \mathbb{N}$ er gitt. Hvis $\delta>0$ (og $\delta \le 1$), så fins $N \ge n$ slik at $a+\delta > a_j \ge a(1-\delta)$ for alle $j \ge N$. Dessuten fins $k \ge N$ slik at $b_k + M > b+M-\delta > 0$. Dette gir

$$a_k b_k + a_k M = a_k(b_k+M) \ge a(1-\delta)(b+M-\delta)$$

$$= ab + aM - \delta a(b+M+1-\delta) \Rightarrow$$

$$a_k b_k \ge ab + (a-a_j)M - \delta a(b+M+1-\delta) > ab - \delta(1+a(b+M+1-\delta))$$

Velg $\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{1+a(b+M+1)}\right\}$. Da er $a_k b_k > ab - \epsilon$.

4.1.7. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$a \in \mathbb{R}$; $\quad M_\varepsilon = \sup\{f(x) \mid x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\} \in (-\infty, \infty]$

$\quad m_\varepsilon = \inf\{f(x) \mid x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\} \in [-\infty, \infty)$

a) M_ε er avtagende og m_ε voksende når $\varepsilon \to 0$

Bevis:

Følger av at mengden $\{f(x) \mid x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$ er avtagende når $\varepsilon \to 0$.

b) $\limsup_{x \to a} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} M_\varepsilon$ og $\liminf_{x \to a} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} m_\varepsilon$

eksisterer.

Bevis:

Dette følger av at M_ε er monotont avtagende og m_ε monotont voksende.

c) $\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \limsup_{x \to a} f(x) = \liminf_{x \to a} f(x) = b$

Bevis:

$\Rightarrow$ Hvis $\delta > 0$, så fins $\varepsilon > 0$ slik at $b - \delta < f(x) < b + \delta$ når $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$. Dette gir

$$b - \delta \leq m_\varepsilon \leq M_\varepsilon \leq b + \delta.$$

Siden δ var vilkårlig, har vi $\lim_{\varepsilon \to 0^+} m_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0^+} M_\varepsilon = b$.

$\Leftarrow$ Gitt $\delta > 0$, så fins $\varepsilon_1 > 0$ slik at $M_{\varepsilon_1} < b + \delta$ og ε_2 slik at $m_{\varepsilon_2} > b - \delta$. Hvis $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ og $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ så er

$$b - \delta < m_{\varepsilon_2} \leq m_\varepsilon \leq f(x) \leq M_\varepsilon \leq M_{\varepsilon_1} < b + \delta.$$

Dette betyr at $\lim_{x \to a} f(x) = b$

d) $\liminf_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = -1$, $\limsup_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = 1$.

Bevis:

$\sin\frac{1}{x}$ er ikke definert i 0, så vi må ta sup og inf for $\sin\frac{1}{x}$ i mengdene $(-\epsilon,\epsilon)\setminus\{0\}$.

Siden $\sin\frac{1}{x} \geq -1$ for alle x følger at $m_\epsilon \geq -1$.

Gitt $\epsilon > 0$, velg k så stor at

$$x_k = \frac{1}{(2k-\frac{1}{2})\pi} < \epsilon \qquad k \in \mathbb{N}$$

Da er $x_k \in (-\epsilon,\epsilon)\setminus\{0\}$ og $\sin\frac{1}{x_k} = \sin(2k-\frac{1}{2})\pi = -1$

Altså er $m_\epsilon = -1$ og $\liminf \sin\frac{1}{x} = \lim m_\epsilon = -1$.

Tilsvarende for lim sup med $x_k = (2k+\frac{1}{2})\pi$