$21/3$.

4.5.1 $\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2} = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ er en norm på $\mathbb{R}^n$

Bevis:

(i) Siden $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0$ er $\|x\| \geq 0$ med likhet hvis og bare hvis $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$, dvs alle $x_i = 0$, så $x = 0$.

(ii) $\|\alpha x\| = (\alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2 + \cdots + \alpha^2 x_n^2)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \|x\|$

(iii) Vi må her bruke Cauchy-Schwarz ulikhet

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Dette gir

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

4.5.2 Hvis (X, d) er kompakt metrisk rom, så er

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$ en norm på X.

Bevis:

Vi vet at supremum er oppnådd, dvs at det fins $x_0 \in X$ slik at $|f(x)| \leq |f(x_0)| = \|f\|$ for alle $x \in X$.

(i) $\|f\| = |f(x_0)| \geq 0$. $\|f\| = 0$ hvis og bare hvis $|f(x_0)| = 0$, dvs. $f(x) = 0$ for alle $x \in X$ og $f \equiv 0$.

(ii) $\|\alpha f\| = \sup\{|\alpha f(x)| : x \in X\} = \sup\{|\alpha| |f(x)| : x \in X\}$

$$= |\alpha| \sup\{|f(x)| : x \in X\} = |\alpha| \|f\|$$

(iii) La x_0 være maks for $|f(x)+g(x)|$. Da er

$$\|f+g\| = |f(x_0)+g(x_0)| \leq |f(x_0)| + |g(x_0)| \leq \|f\| + \|g\|.$$

4.5.3. V normert vektorrom over $\mathbb{K}(=\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C})$. Anta $(u_n),(v_n)$ følger i V og $(\alpha_n),(\beta_n)$ følger i $\mathbb{K}$ slik at $u_n \to u$, $v_n \to v$, $\alpha_n \to \alpha$ og $\beta_n \to \beta$.

(a) $u_n + v_n \to u + v$

Bevis:

La $\varepsilon > 0$. Da fins N slik at $\|u_n - u\| < \frac{\varepsilon}{2}$ og $\|v_n - v\| < \frac{\varepsilon}{2}$ når $n \geq N$. Dette gir

$$\|(u_n+v_n)-(u+v)\| = \|(u_n-u)+(v_n-v)\| \leq \|u_n-u\| + \|v_n-v\| < \varepsilon.$$

(b) $\alpha_n u_n \to \alpha u$

Bevis:

(α_n) er konvergent og derfor begrenset, dvs. det fins K slik at $|\alpha_n| \leq K$ for alle n. Gitt $\varepsilon > 0$, så fins N_1 slik at $\|u_n - u\| < \frac{\varepsilon}{2K}$ når $n \geq N_1$ og N_2 slik at $|\alpha_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2(\|u\|+1)}$ når $n \geq N_2$. For $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$ har vi da

$$\|\alpha_n u_n - \alpha u\| = \|\alpha_n u_n - \alpha_n u + \alpha_n u - \alpha u\| \leq \|\alpha_n(u_n-u)\| + \|(\alpha_n-\alpha)u\|$$

$$= |\alpha_n|\,\|u_n - u\| + |\alpha_n - \alpha|\,\|u\| < K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2(\|u\|+1)} \cdot \|u\|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(c) $\alpha_n u_n + \beta_n v_n \to \alpha u + \beta v$.

Bevis: Det følger fra (b) at $\alpha_n u_n \to \alpha u$ og $\beta_n v_n \to \beta v$. Fra a) får vi da at $\alpha_n u_n + \beta_n v_n \to \alpha u + \beta v$.

4.5.4 V normert vektorrom over $\mathbb{K}$. Da gjelder

a) $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\| \quad \forall u, v \in \mathbb{K}$ (Omvendt trekantulikhet)

Bevis:

$\|u\| = \|u - v + v\| \leq \|u - v\| + \|v\| \Rightarrow \|u\| - \|v\| \leq \|u - v\|$

$\|v\| = \|v - u + u\| \leq \|v - u\| + \|u\| = \|u - v\| + \|u\| \Rightarrow \|u\| - \|v\| \geq -\|u - v\|$

Disse to til sammen viser resultatet.

b) Hvis $u_n \to u$, så vil $\|u_n\| \to \|u\|$

Bevis:

$$|\|u_n\| - \|u\|| \leq \|u_n - u\| \to 0.$$

4.5.5 $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|dt$ er en norm på $C([0,1], \mathbb{R})$.

(i) Siden $|f(t)| \geq 0$ for all $t \in [0,1]$ er $\|f\| \geq 0$. Siden f er kontinuerlig har vi likhet hvis og bare hvis $|f(t)| = 0$ for alle $t \in [0,1]$, dvs $f \equiv 0$.

(ii) $\|\alpha f\| = \int_0^1 |\alpha f(t)|dt = \int_0^1 |\alpha||f(t)|dt = |\alpha| \int_0^1 |f(t)|dt = |\alpha| \|f\|$.

(iii)

$\|f + g\| = \int_0^1 |f(t) + g(t)|dt \leq \int_0^1 |f(t)| + |g(t)|dt = \|f\| + \|g\|$.

4.5.6. $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en basis for c_0.

Bevis:

Vi må vise 2 ting

(1) Hvis $x = (x_n) \in c_0$, så er $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$

(2) Representasjonen over er entydig.

(1): Gitt $\varepsilon > 0$. Da fins N slik at $|x_n| < \varepsilon$ når $n \geq N$.

Da har vi

$$\|x - \sum^{N} x_n e_n\| = \sup\{|x_n| : n > N\} \leq \varepsilon.$$

Dette viser (1).

(2): Hvis $x = \sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n$, så er $y_n = x_n$ for alle n.

For hvis $y_k \neq x_k$ for en k, sett $r = |x_k - y_k| > 0$. Da har vi når $N \geq k$

$$\|x - \sum^{N} y_n e_n\| \geq |x_k - y_k| = r.$$

Dette strider mot at $\sum y_n e_n \to x$ når $N \to \infty$.

4.5.7 Hvis $V \neq \{0\}$ har diskret metrikk, så fins det ingen norm slik at $d(x,y) = \|x - y\|$

Bevis:

I så fall, velg $v \in V$, $v \neq 0$. Da er $\|v\| \neq 0$ og vi kan velge $t > 0$ slik at $t\|v\| \in (0,1)$. Da er

$$d(tv, 0) = \|tv\| = t\|v\| \notin \{0,1\}$$

Dette strider mot at d er diskret.

4.5.8. Anta $V \neq \{0\}$ er normert vektorrom. Da er V komplett hvis og bare hvis $S = \{x \in V \mid \|x\| = 1\}$ er komplett.

Bevis:

$\Rightarrow$ Hvis V er komplett, så er S komplett siden S er lukket.

$\Leftarrow$ Anta at S er komplett og la $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en Cauchy følge i V. Da er også $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy, siden

$$\big|\, \|x_n\| - \|x_m\| \,\big| \leq \|x_n - x_m\|$$

Altså er $(\|x_n\|)$ konvergent, så $\|x_n\| \to M$. Hvis $M = 0$, så må $x_n \to 0$ og er konvergent. Vi kan derfor anta $M > 0$. Da fins N_1 slik at $\frac{1}{2}M < \|x_n\| < 2M$ når $n \geq N_1$. Vi setter nå $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$. Da er $y_n \in S$. (Vi kan bare hoppe over indeksen $n < N$ hvis $x_n = 0$). Vi skal vise at $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$

er Cauchy. Gitt $\varepsilon > 0$. Hvis $\delta > 0$, så fins N_2 slik at $\|x_n - x_m\| < \delta$ når $n \geq N_2$. Hvis $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ har vi

$$\|y_n - y_m\| = \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x_m}{\|x_m\|} \right\| = \frac{1}{\|x_n\|\|x_m\|} \Big\| \|x_m\| x_n - \|x_n\| x_m \Big\|$$

$$= \frac{1}{\|x_n\|\|x_m\|} \Big\| \|x_m\| (x_n - x_m) + (\|x_m\| - \|x_n\|) x_m \Big\|$$

$$\leq \frac{4}{M^2} \Big(\|x_m\| \|x_n - x_m\| + \big| \|x_m\| - \|x_n\| \big| \|x_m\| \Big)$$

$$\leq \frac{4}{M^2} (2M\delta + \delta \cdot 2M) = \frac{16}{M} \delta. \text{ Vi ser velger } \delta < \frac{M}{16}\varepsilon$$

er dette mindre enn ε, så (y_n) er Cauchy og derfor konvergent, $y_n \to y \in S$ og dermed $x_n = \|x_n\| y_n \to My$ ved oppgave 4.5.3 b.

4.5.9 Hvis et normert vektorrom V har en basis $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ så er V separabel.

Bevis:

Vi antar at $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$ er like greit). Vi lar

$$S=\left\{\sum_{i=1}^{n} q_i e_i \,\middle|\, q_i\in\mathbb{Q} \text{ og } n\in\mathbb{N}\right\}$$

I følge oppgave 1.6.3 er S tellbar. Vi må vise at S er tett. La $x\in V$ og $\varepsilon>0$. Da er $x=\sum_{i=1}^{\infty}x_ie_i$. Altså fins N slik at

$$\|x-\sum_{i=1}^{N}x_ie_i\|<\tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

$\mathbb{Q}$ er tett i $\mathbb{R}$, så for hver i fins $q_i\in\mathbb{Q}$ slik at $|x_i-q_i|<\frac{\varepsilon}{2N\|e_i\|}$. La $y=\sum_{i=1}^{N}q_ie_i$. Da er $y\in S$ og

$$\|x-y\|=\|x-\sum^{N}q_ie_i\|=\|x-\sum^{N}x_ie_i+\sum^{N}(x_i-y_i)e_i\|$$

$$\leq\|x-\sum^{N}x_ie_i\|+\|\sum^{N}(x_i-y_i)\|\|e_i\|\leq\|x-\sum x_ie_i\|+\sum^{N}|x_i-y_i|\,\|e_i\|$$

$$<\tfrac{1}{2}\varepsilon+\sum^{N}\frac{\varepsilon}{2N\|e_i\|}\|e_i\|=\tfrac{1}{2}\varepsilon+\tfrac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon$$

4.5.10 $l_1=\{\bar{x}=(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \|\bar{x}\|=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n| \text{ konvergerer}\}$.

a) $\|\bar{x}\|=\sum^{\infty}|x_i|$ er en norm på l_1.

Bevis:

(i) $\|\bar{x}\|\geq 0$ siden $|x_i|\geq 0$. Videre er $\|\bar{x}\|=0$ hvis og bare hvis $|x_i|=0$ for alle $i\in\mathbb{N}$, dvs. $x_i=0$, så $\bar{x}=0$.

(ii) $\|\alpha\bar{x}\|=\sum^{\infty}|\alpha x_i|=\sum^{\infty}|\alpha|\,|x_i|=|\alpha|\sum^{\infty}|x_i|=|\alpha|\,\|\bar{x}\|$

(iii) $\|\bar{x}+\bar{y}\| = \sum^{\infty} |x_i + y_i| \leq \sum^{\infty} |x_i| + |y_i| = \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$

(b) La $\bar{e}_n = (0,0,\cdots,1,0,\cdots)$. Da er $\{\bar{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en basis for l_1.

Bevis: (Se også 4.5.6).

Vi viser først at $\bar{x} = \sum^{\infty} x_n \bar{e}_n$ for alle $x \in l_1$. Anta $\bar{x} \in l_1$ og $\epsilon > 0$. Da fins N slik at $\sum_{n>N} |x_n| < \epsilon$. Da er

$$\|\bar{x} - \sum_{n=1}^{M} x_n \bar{e}_n\| = \sum_{n>M} |x_n| < \epsilon \quad \text{når } M \geq N$$

Altså er $\bar{x} = \sum^{\infty} x_n \bar{e}_n$. Beviset for at representasjonen av $\bar{x}$ er entydig, er akkurat som i 4.5.6.

(c) l_1 er komplett.

Bevis:

La $(\bar{x}^k)$ være en Cauchy-følge i l^1, $\bar{x}^k = (x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$. For hver $n \in \mathbb{N}$ er $|x_n^k - x_n^j| \leq \|\bar{x}^k - \bar{x}^j\|$, altså er $(x_n^k)_{k=1}^{\infty}$ en Cauchy-følge av reelle tall og derfor konvergent, dvs. $x_n^k \to x_n$ når $k \to \infty$ for alle n. La $\bar{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vi skal vise at $\bar{x} \in l_1$ og at $\bar{x}^k \to \bar{x}$ i l_1-norm.

Gitt $\epsilon > 0$. Siden $(\bar{x}^k)$ er Cauchy fins N slik at

$$(*) \quad \|\bar{x}^k - \bar{x}^j\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^k - x_n^j| < \tfrac{1}{2}\epsilon \quad \text{når } k,j \geq N.$$

La $M \in \mathbb{N}$. Siden $x_n^j \to x_n$ når $j \to \infty$ for alle $n \in \mathbb{N}$, fins J slik at $|x_n^j - x_n| < \frac{\epsilon}{2M}$ for alle $n \leq M$ når $j \geq J$.

Hvis $k \geq N$ og $j \geq \max\{N, J\}$ får vi da fra $(*)$

$$\sum_{n=1}^{M} |x_n^k - x_n| \leq \sum_{n=1}^{M} |x_n^k - x_n^j| + |x_n^j - x_n| < \tfrac{1}{2}\epsilon + \frac{\epsilon}{2M}\cdot M = \epsilon .$$

Dette holder for alle $M \in \mathbb{N}$. Derfor har vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^k - x_n| \leq \epsilon \quad \text{når } k \geq N.$$

Altså er $\bar{x} - \bar{x}^k \in l_1$ og dermed $\bar{x} = (\bar{x} - \bar{x}_k) + \bar{x}^k \in l_1$.
Dessuten er

$$\|\bar{x}^k - \bar{x}\| = \sum^{\infty} |x_n^k - x_n| \leq \epsilon .$$

Dette viser at $\bar{x}^k \to \bar{x}$ i l_1-norm.

4.6.1 $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$ er indre produkt i $\mathbb{R}^n$
$z \cdot w = z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + \cdots + z_n \overline{w_n}$ er indre produkt i $\mathbb{C}^n$.

Bevis:

Vi tar det komplekse tilfellet

(i) $\overline{w \cdot z} = \overline{w_1 \bar{z}_1 + w_2 \bar{z}_2 + \cdots + w_n \bar{z}_n} = \overline{w_1 \bar{z}_1} + \overline{w_2 \bar{z}_2} + \cdots + \overline{w_n \bar{z}_n}$

$= \overline{w_1} z_1 + \overline{w_2} z_2 + \cdots + \overline{w_n} z_n = z \cdot w$

(ii) $(u+z) \cdot w = (u_1 + z_1)\overline{w_1} + \cdots + (u_n + z_n)\overline{w_n}$

$= u_1 \overline{w_1} + \cdots + u_n \overline{w_n} + z_1 \overline{w_1} + \cdots + z_n \overline{w_n} = u \cdot w + z \cdot w$

(iii) $(\alpha z) \cdot w = (\alpha z_1)\overline{w_1} + (\alpha z_2)\overline{w_2} + \cdots + (\alpha z_n)\overline{w_n} =$

$\alpha\left(z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + \cdots + z_n \overline{w_n}\right) = \alpha (z \cdot w)$.

(iv) $z \cdot z = z_1 \bar{z}_1 + \cdots + z_n \bar{z}_n = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 \geq 0$ med
likhet hvis og bare hvis $|z_j|^2 = 0$ for alle j, dvs $z_j = 0\ \forall j$.

<u>4.6.3</u> $\langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ for alle $u, v, w \in V$

Bevis:

$$\langle u, v+w \rangle \overset{(i)}{=} \overline{\langle v+w, u \rangle} \overset{(ii)}{=} \overline{\langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle} = \overline{\langle v, u \rangle} + \overline{\langle w, u \rangle}$$
$$\overset{(i)}{=} \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

<u>4.6.4</u> $\langle u, \alpha v \rangle = \bar{\alpha} \langle u, v \rangle$ for alle $\alpha \in \mathbb{K}$, $u, v \in V$

Bevis:

$$\langle u, \alpha v \rangle \overset{(i)}{=} \overline{\langle \alpha v, u \rangle} \overset{(iii)}{=} \overline{\alpha \langle v, u \rangle} = \bar{\alpha}\, \overline{\langle v, u \rangle} \overset{(i)}{=} \bar{\alpha} \langle u, v \rangle$$

<u>4.6.5</u> $\langle \alpha u, \alpha v \rangle = |\alpha|^2 \langle u, v \rangle$

Bevis:

$$\langle \alpha u, \alpha v \rangle \overset{(i)}{=} \alpha \langle u, \alpha v \rangle \overset{(vi)}{=} \alpha \bar{\alpha} \langle u, v \rangle = |\alpha|^2 \langle u, v \rangle.$$

<u>4.6.6.</u> Hvis A er en symmetrisk reell matrise med strengt positive egenverdier så er
$$\langle u, v \rangle = (Au) \cdot v$$
et indre produkt på $\mathbb{R}^n$.

Bevis:

Det er lett å sjekke at $(Au) \cdot v = u \cdot (A^t v)$ for alle $u, v \in \mathbb{R}^n$. A^t = den transponerte til A ($= A$ når A er symmetrisk).

(i) $\langle u, v \rangle = (Au) \cdot v = u \cdot (Av) = (Av) \cdot u = \langle v, u \rangle$

(ii) $\langle u+v, w \rangle = (A(u+v)) \cdot w = (Au + Av) \cdot w = (Au) \cdot w + (Av) \cdot w$
$= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

(iii) $\langle \alpha u, v \rangle = (A(\alpha u)) \cdot v = (\alpha Au) \cdot v = \alpha((Au) \cdot v) = \alpha \langle u, v \rangle$

(iv) Her må vi bruke spektralteoremet: $\mathbb{R}^n$ har en ortonormal basis $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ av egenvektorer for A, dvs. $Ae_i = \lambda_i e_i$. Egenverdiene er strengt positive, dvs. $\lambda_i > 0$. Hvis $u = \sum u_i e_i$ har vi da

$$\langle u, u \rangle = Au \cdot u = \left(\sum \lambda_i u_i e_i\right) \cdot \left(\sum u_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i^2 \geq 0$$

siden alle $\lambda_i > 0$. Likhet hvis og bare hvis $u_i^2 = 0$ for alle i, dvs. $u_i = 0$.

4.6.8 I et indreproduktrom, hvis $u_n \to u$ og $v_n \to v$, så vil $\langle u_n, v_n \rangle \to \langle u, v \rangle$

Bevis:

$$|\langle u, v \rangle - \langle u_n, v_n \rangle| = |\langle u, v \rangle - \langle u, v_n \rangle + \langle u, v_n \rangle - \langle u_n, v_n \rangle|$$

$$= |\langle u, v - v_n \rangle + \langle u - u_n, v_n \rangle| \leq |\langle u, v - v_n \rangle| + |\langle u - u_n, v_n \rangle|$$

$$\overset{C.S.}{\leq} \|u\| \|v - v_n\| + \|u - u_n\| \|v_n\| \to 0 \quad \text{når } n \to \infty$$

siden $\|u - u_n\| \to 0$, $\|v - v_n\| \to 0$ og $\|v_n\|$ er begrenset.