UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT2400 — Analyse 1.
Eksamensdag:	19. august 2011.
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver (1a, 1b, 1c, 2, 3a, 3b osv.) teller 10 poeng.

Oppgave 1

Funksjonen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x \in [-\pi, 0) \\ \\ 1 & \text{hvis } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

a) Vis at hvis $n \in \mathbb{Z}$, så er

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx = \begin{cases} \pi & \text{hvis } n = 0 \\ \\ 0 & \text{hvis } n \text{ er like og ulik } 0 \\ \\ -\frac{2i}{n} & \text{hvis } n \text{ er odde} \end{cases}$$

b) Finn Fourierrekken til f. Hvilken funksjon konvergerer denne rekken punktvis mot? Er konvergensen uniform?

c) Vis at Fourierrekken kan skrives

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \sin\big((2k+1)x\big)}{\pi(2k+1)}$$

Oppgave 2

Hvis (X, d) er et metrisk rom, og $\{x_n\}$ er en følge i X, kaller vi $a \in X$ et *grensepunkt* for $\{x_n\}$ dersom det finnes en delfølge av $\{x_n\}$ som konvergerer mot a. Vis at a er et grensepunkt for $\{x_n\}$ hvis og bare hvis alle kuler $B(a; r)$, $r > 0$, om a inneholder uendelig mange elementer i følgen.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3

I denne oppgaven er μ Lebesgue-målet på $\mathbb{R}^d$, og B_n er kulen

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^d \, : \, \|x\| \leq n\}$$

a) Vis at dersom $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ er en ikke-negativ, målbar funksjon, så er

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} f \, d\mu = \int f \, d\mu$$

b) Vis at dersom $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ er en integrerbar funksjon, så er

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} g \, d\mu = \int g \, d\mu$$

Oppgave 4

I denne oppgaven er X mengden av alle funksjoner

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

slik at grenseverdien $\lim_{i\to\infty} f(i)$ eksisterer (grensen må være et tall; vi tillater ikke $\pm\infty$ som grenseverdier).

a) Vis at

   (i) Dersom $f \in X$ og $c \in \mathbb{R}$, så er $cf \in X$.

   (ii) Dersom $f, g \in X$, så er $f + g \in X$.

Resultatet i punkt a) forteller oss at X er et vektorrom. Dette kan du bruke fritt i fortsettelsen.

b) Vis at $\sup\{|f(i)| \, : \, i \in \mathbb{N}\}$ er endelig for alle $f \in X$.

c) Vis at

$$\|f\| = \sup\{|f(i)| \, : \, i \in \mathbb{N}\}$$

   er en norm på X.

d) Vis at X er komplett.

Oppgave 5

I denne oppgaven er (X, d_X) og (Y, d_Y) to kompakte, metriske rom, og $f : X \to Y$ er en inverterbar, kontinuerlig funksjon. Vis at den omvendte (inverse) funksjonen $g : Y \to X$ er kontinuerlig.

SLUTT