UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT2400 — Analyse 1.
Eksamensdag:	Mandag 31. mai, 2010.
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Hvert delspørsmål (1a, 1b, osv.) teller 10 poeng.

Oppgave 1

a) La d_1 og d_2 være to metrikker definert på en ikke-tom mengde X. Definer $d : X \times X \to \mathbb{R}$ ved

$$d(x, y) = \max\{d_1(x, y), d_2(x, y)\}.$$

Vis at d er en metrikk på X.

b) La (X, d) være et metrisk rom og $f : X \to \mathbb{R}$ en funksjon. Vi sier at f er uniformt kontinuerlig hvis for hver $\epsilon > 0$ fins $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ slik at $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ for alle $x, y \in X$ slik at $d(x, y) < \delta$.

Vis at om f ikke er uniformt kontinuerlig, så fins en $\epsilon > 0$ og følger x_n, y_n i X slik at $d(x_n, y_n) \to 0$ når $n \to \infty$, men $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ for alle n.

c) Vis at om (X, d) har Bolzano-Weierstrass egenskapen, så vil enhver kontinuerlig funksjon $f : X \to \mathbb{R}$ være uniformt kontinuerlig.

Oppgave 2

a) La $A \subset \mathbb{R}$ være en begrenset mengde. La $M \in \mathbb{R}$. Vis at $M = \sup A$ hvis og bare hvis følgende er oppfylt:

$a \leq M$ for alle $a \in A$ og det fins følge $a_n \in A$ slik at $a_n \to M$ når $n \to \infty$.

(Fortsettes på side 2.)

b) La

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < -2n \\ \frac{1}{n}e^{-n^2}(x+2n) & \text{for } x \in [-2n, -n] \\ e^{-x^2} & \text{for } x \in (-n, n) \\ \frac{1}{n}e^{-n^2}(-x+2n) & \text{for } x \in [n, 2n] \\ 0 & \text{for } x > 2n\,, \end{cases}$$

$n = 1, 2, \dots$.

Vis at f_n konvergerer uniformt mot $f(x) = e^{-x^2}$.

c) La $C_K(\mathbb{R})$ være vektorrommet av kontinuerlige funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, med egenskapen at det fins $a = a(f) < b = b(f)$ (dvs. a, b avhenger av f) slik at $f(x) = 0$ når $x \notin [a, b]$.

La $B_C(\mathbb{R})$ være vektorrommet av begrensete, kontinuerlige funksjoner $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Forklar hvorfor $C_K(\mathbb{R}) \subset B_C(\mathbb{R})$. Er $C_K(\mathbb{R})$ et lukket underrom av $B_C(\mathbb{R})$ i den uniforme metrikken (dvs. metrikken vi får fra den uniforme normen $||g||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}|g(x)|$) ?

d) La $g \in B_C(\mathbb{R})$. Sett $T_g(f) = gf$ der $f \in C_K(\mathbb{R})$. Vis at T_g definerer en kontinuerlig lineær avbildning $T_g : C_K(\mathbb{R}) \to C_K(\mathbb{R})$ (der $C_K(\mathbb{R})$ gis den uniforme normen). Vis at operatornormen $||T_g||$ er lik $||g||_\infty$.

Oppgave 3

a) La

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0)\,. \end{cases}$$

Vis at f er kontinuerlig i $(0, 0)$.

Vis at $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ eksisterer i $(0, 0)$ og at $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, men at f ikke er deriverbar i $(0, 0)$.

b) La $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$F(x, y, z) = (e^{x-y} + z^2, e^{x+y} + \ln(1 + z^2), z).$$

Finn Jacobimatrisen til F.

Vis at det fins en åpen mengde B med $(0, 0, 0) \in B$, og en åpen mengde V med $(1, 1, 0) \in V$ slik at $F|B : B \to V$ er en differensiabel bijeksjon med differensiabel invers $G : V \to B$, der G er på formen

$$G(u, v, w) = (f(u, v, w), g(u, v, w), w).$$

(Her betegner (u, v, w) koordinater i V).

Finn Jacobimatrisen til G i $(1, 1, 0)$.

SLUTT