UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT2400 — Analyse 1.
Eksamensdag:	Onsdag 15. juni 2011.
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver (1, 2, 3a, 3b osv.) teller 10 poeng.

Oppgave 1

Funksjonene $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er definert ved

$$f_n(x) = \arctan(x^{2n})$$

Vis at

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{dersom } |x| > 1 \\ \frac{\pi}{4} & \text{dersom } |x| = 1 \\ 0 & \text{dersom } |x| < 1 \end{cases}$$

Er konvergensen uniform?

Oppgave 2

(X, d) er et metrisk rom, og A er en delmengde av X. Vi sier at $b \in X$ er et *opphopningspunkt* for A dersom alle kuler $B(b; r)$, $r > 0$, inneholder et punkt fra A forskjellig fra b. Vis at b er et opphopningspunkt for A hvis og bare hvis det finnes en følge $\{x_n\}$ fra A som konvergerer mot b og der alle elementene er forskjellige fra b.

Oppgave 3

I denne oppgaven er μ Lebesgue-målet på $\mathbb{R}^d$, og $\mathcal{M}^+$ er mengden av ikke-negative, målbare funksjoner $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$. Anta at $I : \mathcal{M}^+ \to [0, \infty]$ tilfredsstiller disse fire betingelsene:

(i) $I(cf) = cI(f)$ for alle $c \in [0, \infty)$ og alle $f \in \mathcal{M}^+$.

(ii) $I(f + g) = I(f) + I(g)$ for alle $f, g \in \mathcal{M}^+$.

(Fortsettes på side 2.)

(iii) $I(\mathbf{1}_A) = \mu(A)$ for alle målbare $A \subset \mathbb{R}^d$.

(iv) Dersom $\{f_n\}$ er en voksende følge fra $\mathcal{M}^+$ som konvergerer mot f, så er $\lim_{n\to\infty} I(f_n) = I(f)$.

a) Vis ved induksjon at

$$I(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n) = c_1 I(f_1) + c_2 I(f_2) + \cdots + c_n I(f_n)$$

for alle $n \in \mathbb{N}$, alle $c_1, c_2, \ldots, c_n \in [0, \infty)$ og alle $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{M}^+$.

b) Vis at $I(f) = \int f \, d\mu$ for alle ikke-negative, enkle funksjoner f.

c) Vis at $I(f) = \int f \, d\mu$ for alle $f \in \mathcal{M}^+$.

Oppgave 4

I denne oppgaven er X mengden av alle funksjoner

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

slik at

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(i)| < \infty$$

a) Vis at

(i) Dersom $f \in X$ og $c \in \mathbb{R}$, så er $cf \in X$.

(ii) Dersom $f, g \in X$, så er $f + g \in X$.

Resultatet i punkt a) forteller oss at X er et vektorrom. Dette kan du bruke fritt i fortsettelsen.

b) Vis at

$$\|f\| = \sum_{i=1}^{\infty} |f(i)|$$

er en norm på X.

c) For alle $n \in \mathbb{N}$ er $e_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definert ved

$$e_n(i) = \begin{cases} 1 & \text{dersom } i = n \\ \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Vis at $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en basis for X.

d) Vis at $\lim_{n\to\infty} \|f - e_n\| = \|f\| + 1$ for alle $f \in X$. Hvorfor kan ikke $\{e_n\}$ ha en konvergent delfølge i $(X, \|\cdot\|)$?

e) Vis at

$$B = \{f \in X \; : \; \|f\| \leq 1\}$$

er lukket og begrenset, men ikke kompakt. Er B totalt begrenset?

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 5

I denne oppgaven er (X, d) et metrisk rom, A er en delmengde av X, $f : A \to \mathbb{R}$ er en uniformt kontinuerlig funksjon, og b er et randpunkt til A. Vis at dersom $\{x_n\}$ er en følge fra A som konvergerer mot b, så konvergerer følgen $\{f(x_n)\}$. Finn et eksempel som viser at dette ikke alltid gjelder dersom vi bare antar at f er kontinuerlig.

SLUTT