UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT2400 — Analyse 1
Eksamensdag:	Tirsdag 12. juni 2012
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle punkter teller likt.

NB: Alle svar må begrunnes!

Oppgave 1

En følge $\{g_n\}$ av funksjoner er definert i $[0, \infty)$ ved

$$g_n(x) = \frac{1}{(1+nx)^2}.$$

1a

Vis at hver av funksjonene $g_n(x)$ er uniformt kontinuerlig i intervallet $(1, \infty)$. Er de uniformt kontinuerlig i $[0, 1]$?

1b

Vis at følgen $g_n(x)$ konvergerer uniformt i $(1, \infty)$. Konvergerer den uniformt i $[0, 1]$?

Oppgave 2

La a være et reellt tall med $0 < a < \pi$, og la $f(x)$ være den karakteristiske funksjonen til intervallet $[-a, a]$; altså:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{if } x \notin [-a, a]. \end{cases}$$

2a

Vis at Fourier-rekken til f er gitt ved

$$\frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na \cos nx}{n}.$$

(Fortsettes på side 2.)

2b

Vis at

$$\frac{\pi}{2} - a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2na}{n}.$$

2c

Følgende trigonometriske rekke er Fourier-rekken til en funksjon $g(x)$:

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na \sin nx}{n^2}.$$

Finn funksjonen $g(x)$.

Oppgave 3

I denne oppgaven betegner $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ en målbar funksjon (der $\overline{\mathbb{R}}$ betegner mengden $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$).

3a

Hva betyr det at f er integrerbar?

3b

Anta at f er integrerbar. Vis at mengdene $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \infty\}$ og $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = -\infty\}$ begge er av mål null.

3c

Anta at f er målbar og at $\int_E f = 0$ for alle målbare undermengder E av $\mathbb{R}$. Vis at $f = 0$ nesten overalt.

Oppgave 4

La $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en funksjon. For hver $\epsilon > 0$ lar vi $U_\epsilon \subseteq \mathbb{R}$ være mengden bestående av de tallene $x \in \mathbb{R}$ som tilfredstiller følgende betingelse:

Det finnes en $\delta > 0$ slik at hvergang s og t oppfyller $|x - s| < \delta$ og $|x - t| < \delta$, så er $|f(s) - f(t)| < \epsilon$.

Med symboler uttrykkes dette slik:

$$U_\epsilon = \{x \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 \text{ such that } |x - s| < \delta \text{ and } |x - t| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \epsilon\}.$$

4a

Vis at U_ϵ er åpen.

4b

Vis at f er kontinuerlig i $x \in \mathbb{R}$ hvis og bare hvis $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{\frac{1}{n}}$.

(Fortsettes på side 3.)

I resten av denne oppaven antar vi at $\{V_n\}$, med $n \geq 1$, er en nedstigende følge av åpne mengder i $\mathbb{R}$ med $V_1 = \mathbb{R}$. La $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$.

Hvis $x \notin A$, la $n(x)$ være det naturlige tallet slik at $x \in V_{n(x)}$, men $x \notin V_{n(x)+1}$. La f være gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in A \\ 3^{-n(x)} & \text{if } x \in \mathbb{Q} \cap A^c \\ -3^{-n(x)} & \text{if } x \in \mathbb{Q}^c \cap A^c \end{cases}$$

der $\mathbb{Q}$ som vanlig betegner mengden av de rasjonale tallene.

4c

Vis at f er kontinuerlig i x om $x \in A$.

4d

Vis at f ikke er kontinuerlig i x om $x \notin A$. HINT: Anta at det finnes en $x \notin A$ der f er kontinuerlig. Bruk $\epsilon = \frac{1}{2} \cdot 3^{-n(x)}$ til å oppnå en motsigelse.

SLUTT