UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT2400 — Reell analyse
Eksamensdag:	Mandag 2. juni 2014
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver (Oppgave 1, 2, 3, 4a, 4b osv.) teller 10 poeng.

Oppgave 1: Funksjonene $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ er definert ved

$$f_n(x) = n^2 x^2 e^{-nx}$$

a) Vis at følgen $\{f_n\}$ konvergerer punktvis.

b) Konvergerer følgen uniformt?

Oppgave 2: I denne oppgaven er (X_1, d_1) og (X_2, d_2) to metriske rom. Anta at (X_1, d_1) og (X_2, d_2) er isometriske, dvs. at det finnes en bijeksjon $\phi : X_1 \to X_2$ slik at

$$d_1(x, y) = d_2(\phi(x), \phi(y)) \quad \text{for alle } x, y \in X_1.$$

Vis at dersom (X_1, d_1) er komplett, så er (X_2, d_2) også komplett.

Oppgave 3: Anta at $(X, \mathcal{A}, \mu)$ er et målrom. Husk at en følge $\{f_n\}$ av funksjoner fra X til $\mathbb{R}$ kalles *begrenset* dersom det finnes en $M \in \mathbb{R}$ slik at $|f_n(x)| \leq M$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og alle $x \in X$. Anta at $\{f_n\}$ er en begrenset følge av målbare funksjoner som konvergerer punktvis mot en funksjon f. Vis at dersom $\mu(X) < \infty$, så er

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$$

Finn et eksempel som viser at dette ikke alltid er tilfellet når $\mu(X) = \infty$.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4: I denne oppgaven er X en ikke-tom mengde, og $\mathcal{D}$ er en ikke-tom familie av delmengder av X slik at følgende tre betingelser er oppfylt:

(i) Dersom $A \in \mathcal{D}$, så er $A^c \in \mathcal{D}$.

(ii) Dersom $A, B \in \mathcal{D}$, så er $A \cap B \in \mathcal{D}$.

(iii) Dersom $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en disjunkt følge av mengder i $\mathcal{D}$, så er $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

a) Vis at $\emptyset \in \mathcal{D}$.

b) Vis ved induksjon at dersom $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{D}$, så er $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{D}$.

c) Vis at dersom $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{D}$, så er $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{D}$.

d) Vis at $\mathcal{D}$ er en σ-algebra.

Oppgave 5: I denne oppgaven er d_1 and d_2 to metrikker på den samme ikke-tomme mengden X. Definer $d : X \times X \to \mathbb{R}$ ved

$$d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y) \quad \text{for alle } x, y \in X.$$

a) Vis at d er en metrikk på X.

Vi sier at d_1 og d_2 er *kompatible* dersom følgende betingelse er oppfylt:

Betingelse: Dersom en følge $\{x_n\}$ konvergerer til a i d_1-metrikken og til b i d_2-metrikken, så er $a = b$.

b) Anta at d_1 og d_2 er kompatible. Vis at dersom $C \subseteq X$ er kompakt med hensyn på både d_1 og d_2, så er C også kompakt med hensyn på d.

Oppgave 6: Anta at $\{x_n\}$ er en følge av reelle tall som konvergerer mot $a \in \mathbb{R}$. Vis at $\{x_n\}$ er begrenset, dvs. at det finnes en $M \in \mathbb{R}$ slik at $|x_n| \leq M$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vis også at dersom

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N},$$

så konvergerer følgen $\{y_n\}$ mot a.

SLUTT