9. mai 2019

MAT 2400

Oblig 2 - Løsningsforslag

Oppgave 1. La X være vektorrommet $X = C([-1,1],\mathbb{R})$ utstyrt med sup-norm, og la $G : X \to X$ være definert ved

$$G(f)(x) = \int_0^x f(s)^m ds,$$

for en $m \in \mathbb{N}$. Vis at G er deriverbar i ethvert element $f \in X$ og finn de deriverte.

Løsningsforslag: Vi begynner med å finne de retningsderiverte. Vi har

$$\begin{aligned}
G'(f;r)(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{\int_0^x (f(s)+tr(s))^m - f(s)^m ds}{t} \\
&= \int_0^x mf(s)^{m-1}r(s)ds + \lim_{t\to 0} \frac{\int_0^x \sum_{k=2}^m \binom{m}{k} f(s)^{m-k}(tr(s))^k ds}{t} \\
&= \int_0^x mf(s)^{m-1}r(s)ds,
\end{aligned}$$

hvor konvergensen er uniform på grunn av potensen 2 av t i det siste integralet. Dette antyder at avbildingen A definert ved

$$A(r)(x) = \int_0^x mf(s)^{m-1}r(s)ds$$

er den deriverte til G i punktet f. *Linearitet*:

$$\begin{aligned}
A(\alpha r_1 + \beta r_2)(x) &= \int_0^x mf(s)^{m-1}(\alpha r_1(s) + \beta r_2(s))ds \\
&= \alpha \int_0^x mf(s)^{m-1}r_1(s)ds + \beta \int_0^x mf(s)^{m-1}r_2(s)ds \\
&= \alpha A(r_1)(x) + \beta A(r_2)(x).
\end{aligned}$$

Avbildingen er også *begrenset* siden

$$\begin{aligned}
|A(r)(x)| &= |\int_0^x mf(s)^{m-1}r(s)ds| \\
&\leq \int_0^x |mf(s)^{m-1}||r(s)|ds \\
&\leq (\int_0^1 |mf(s)|^{m-1}ds)\|r\| \\
&=: M \cdot \|r\|,
\end{aligned}$$

så $\|A(r)\| \leq M \cdot \|r\|$ for all r. Det gjenstår å estimere restleddet.

$$\begin{aligned}
|\sigma(r)(x)| &= |G(f+r)(x) - G(f)(x) - A(r)(x)| \\
&= |\int_0^x (f(s)+r(s))^m - f(s)^m - mf(s)^{m-1}r(s)ds| \\
&= |\int_0^x \sum_{k=2}^m \binom{m}{k} f(s)^{m-k}r(s)^k ds| \\
&\leq \sum_{k=2}^m (\int_0^x \binom{m}{k} |f(s)|^{m-k}) \cdot \|r\|^k
\end{aligned}$$

,

som viser at det fins en konstant M_2 slik at $\|\sigma(r)\| \leq M_2 \cdot \|r\|^2$, og dermed at restleddet går mot null raskere enn $\|r\|$.

Oppgave 2. La Y være et komplett lineært rom, og la M betegne rommet av alle begrensede lineære operatorer fra Y til seg selv. La $L : M \to M$ være avbildingen definert ved

$$L(A) := A^2.$$

(a) Vis at L er deriverbar i alle $A \in M$, og finn de deriverte.

(b) Vis at det fins en $\epsilon > 0$ slik at for $B \in M$ med $\|B - \mathrm{Id}\| < \epsilon$, fins det en begrenset lineær operator $A = \sqrt{B}$, det vil si en begrenset lineær operator A slik at $A^2 = B$. Er en slik A unik?

Løsningsforslag:

(a) Vi begynner med å finne de retningsderiverte.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{L(A+tr) - L(A)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{(A+tr)^2 - A^2}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{A^2 + Atr + trA + t^2r^2 - A^2}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t(Ar + rA) + t^2r^2}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} Ar + rA + tr^2 \\
&= Ar + rA.
\end{aligned}$$

Dette indikerer at den deriverte (gitt at den eksisterer) kan være gitt ved $L'(A)(r) = Ar + rA$.

(i) Linearitet:

$$\begin{aligned}
L'(A)(\alpha r_1 + \beta r_2) &= A(\alpha r_1 + \beta r_2) + (\alpha r_1 + \beta r_2)A \\
&= A\alpha r_1 + A\beta r_2 + \alpha r_1 A + \beta r_2 A \\
&= \alpha(Ar_1 + r_1 A) + \beta(Ar_2 + r_2 A) \\
&= \alpha L'(A)(r_1) + \beta L'(A)(r_2).
\end{aligned}$$

(ii) Begrensethet:

$$\|Ar + rA\| \leq \|Ar\| + \|rA\| \leq \|A\|\|r\| + \|r\|\|A\| \leq 2\|A\|\|r\|,$$

der $\|A\|$ er en konstant siden A er gitt på forhånd.

(iii) Restleddet:

$$\begin{aligned}
L(A+r) - L(A) - L'(A)(r) &= (A+r)^2 - L(A) - (Ar + rA) \\
&= A^2 + Ar + rA + r^2 - A^2 - (Ar + rA) \\
&= r^2,
\end{aligned}$$

og $\|r^2\|$ går mot null raskere enn $\|r\|$.

(b) Vi vil bruke det inverse funksjonsteorem, så først vil vi vise at L' er kontinuerlig. Vi har at

$$\begin{aligned}
\|(L'(A) - L'(B))(r)\| &= \|L'(A)(r) - L'(B)(r)\| \\
&= \|Ar + rA - Br - rB\| \\
&= \|(A - B)r + r(A - B)\| \\
&\leq 2\|A - B\|\|r\|,
\end{aligned}$$

så $\|(L'(A) - L'(B))\| \leq 2\|A - B\|$, så L' er Lipschitz-kontinuerlig. Videre ser vi at $L'(Id)(r) = Ir + rA = 2Ir$ (siden avbildinger kommuterer med identiteten) så $L'(Id) = 2Id$ som er en invertibel begrenset lineær operator. Siden $L(Id) = Id$ sier det inverse funksjonsreorem da nettopp at den fins en ϵ-omegn om Id med en invers L^{-1} til L, det vil si at $L(L^{-1}(B)) = (L^{-1}(B))^2 = B$. Så vi setter $A = L^{-1}(B)$. En slik A er lokalt unik, men ikke globalt, siden $(-A)^2 = A^2 = B$.

Oppgave 3. La l_2 være mengden av alle reelle følger $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ slik at $\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < \infty$.

(a) Vis at hvis $\mathbf{x} = \{x_j\}, \mathbf{y} = \{y_j\} \in l_2$, så konvergerer $\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$ (Hint: bruk Cauchy-Schwarz ulikhet).

(b) Vis at l_2 er et vektorrom.

(c) Vis at $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$ er et indreprodukt på l_2.

(d) Vis at l_2 (med metrikken indusert fra indreproduktet i (c) er komplett.

(e) For hver $j \in \mathbb{N}$, la $\mathbf{e_j} \in l_2$ være følgen hvis j-te komponent er 1 og de andre er 0. Vis at $\{\mathbf{e_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ er en basis for l_2.

Løsningsforslag:

(a) La $\epsilon > 0$ være gitt. Da fins $N \in \mathbb{N}$ slik at $|\sum_{j=k}^{l} x_j^2| < \epsilon$ og $|\sum_{j=k}^{l} y_j^2| < \epsilon$ når $N \leq k < l$. Hvis vi nå bruker Cauchy-Schwarz med det ordinære indreproduktet på $\mathbb{R}^{l-k}$ får vi

$$|\sum_{j=k}^{l} x_j y_j| \leq (\sum_{j=k}^{l} x_j^2)^{1/2} \cdot (\sum_{j=k}^{l} y_j^2)^{1/2} < \epsilon^{1/2} \cdot \epsilon^{1/2} = \epsilon.$$

Dette viser at følgen av delsummer $s_N = \sum_{j=1}^{N} x_j y_j$ er en Cauchy-følge, så summen konvergerer.

(b) Her er det underforstått at for $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in l_2$ setter vi $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \{x_j + y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, og hvis $\alpha \in \mathbb{R}$ så setter vi $\alpha \cdot \mathbf{x} = \{\alpha \cdot x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Før vi går igang med å sjekke at (i)–(viii) på side 133–134 er tilfredsstilt, må vi sjekke at $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in l_2$ og at $\alpha \cdot \mathbf{x} \in l_2$. Det letteste er det siste, siden $\sum_{j=1}^{\infty} (\alpha \cdot x_j)^2 = \alpha^2 \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2$, som er mindre enn ∞ ettersom $\mathbf{x} \in l_2$. Videre har vi

$$\sum_{j=1}^{\infty} (x_j + y_j)^2 = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 + \sum_{j=1}^{\infty} y_j^2 + 2\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j,$$

der de to første summene til høyre for likhetstegnet konvergerer siden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in l_2$, og den siste summen konvergere ved (a). Vi dropper her i løsningsforslaget å vise (i)–(viii).

(c) Det følger fra (a) at $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{R}$. Vi dropper her i løsningsforslaget å vise (i) til (iv) på side 142 i boka.

(d) Anta at $\{\mathbf{x_k}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{\{x_j^k\}_{j\in\mathbb{N}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ er en Cauchy-følge. Vi må vise at $\mathbf{x_k}$ konvergerer mot en grense i l_2. Vi starter med å finne en kandidat til grensen. Merk først at dersom vi fikserer en $j \in \mathbb{N}$, så er $\{x_j^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en Cauchy følge. Dette er fordi det for enhver $\epsilon > 0$ fins $N \in \mathbb{N}$ slik at

$$|x_j^n - x_j^m| = ((x_j^n - x_j^m)^2)^{1/2} \leq (\sum_{j=1}^{\infty}(x_j^n - x_j^m)^2)^{1/2} < \epsilon,$$

når $N \leq m < n$. Vi setter så $x_j^\infty = \lim_{k\to\infty} x_j^k$, og siden $\mathbf{x}_\infty = \{x_j^\infty\}_{j\in\mathbb{N}}$. Det gjenstår nå å vise at $\mathbf{x}_\infty \in l_2$ og at $\mathbf{x_k} \to \mathbf{x}_\infty$ når $k \to \infty$.

La nå $\|\cdot\|$ betegne normen indusert av indreproduktet over. Siden $\mathbf{x_k}$ er Cauchy, fins en $N \in \mathbb{N}$ slik at $\|\mathbf{x_n} - \mathbf{x_m}\| < 1$ når $N \leq m < n$. Så for alle $n > N$ har vi at

$$\|\mathbf{x_n}\| = \|\mathbf{x_N}\| + (\|\mathbf{x_n}\| - \|\mathbf{x_N}\|) \leq \|\mathbf{x_N}\| + |\|\mathbf{x_n}\| - \|\mathbf{x_N}\|| \leq \|\mathbf{x_N}\| + 1,$$

(der vi i siste ulikhet har brukt (5.1.2) på side 136 i læreboka). Det følger da at for enhver $M \in \mathbb{N}$ så har vi at

$$(\sum_{j=1}^{M}(x_j^\infty)^2)^{1/2} = \lim_{k\to\infty}(\sum_{j=1}^{M}(x_j^k)^2)^{1/2} \leq \|\mathbf{x_N}\| + 1,$$

så $\sum_{j=1}^\infty (x_j^\infty)^2 < \infty$.

Det gjenstår å vise at $\mathbf{x_k} \to \mathbf{x}_\infty$ når $k \to \infty$. Gitt $\epsilon > 0$ fikserer vi så en $N \in \mathbb{N}$ slik at $\|\mathbf{x_n} - \mathbf{x_k}\| < \epsilon/2$ når $N \leq k < n$. For enhver $M \in \mathbb{N}$ har vi da at

$$(\sum_{j=1}^{M}(x_j^\infty - x_j^k)^2)^{1/2} = \lim_{n\to\infty}(\sum_{j=1}^{M}(x_j^n - x_j^k)^2)^{1/2} \leq \epsilon/2,$$

så lenge $k \geq N$, så $\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}_\infty\| \leq \epsilon/2 < \epsilon$ så lenge $k \geq N$.

(e) La $\mathbf{x} = \{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in l_2$. Vi setter $\alpha_j = x_j$, og påstår at $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^\infty \alpha_j \mathbf{e_j}$. La så $\epsilon > 0$ være gitt, og se så på delsummene $s_N = \sum_{j=1}^N \alpha_j \mathbf{e_j}$. Vi har at $\mathbf{x} - s_N = \{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ der $a_j = 0$ for $j = 1, ..., N$, og $a_j = x_j$ for $j \geq N+1$. Så $\|\mathbf{x} - s_N\| = (\sum_{j=N+1}^\infty x_j^2)^{1/2}$, som per definisjon er mindre enn ϵ når N er tilstrekkelig stor.

Til slutt, hvis $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^\infty \alpha_j \mathbf{e_j} = \sum_{j=1}^\infty \beta_j \mathbf{e_j}$, så har vi

$$0 = \|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j \mathbf{e_j} - \sum_{j=1}^{\infty}\beta_j \mathbf{e_j}\|^2 = \|\sum_{j=1}^{\infty}(\alpha_j - \beta_j)\mathbf{e_j}\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}(\alpha_j - \beta_j)^2,$$

som kan holde (hvis og) bare hvis $\alpha_j = \beta_j$ for alle $j \in \mathbb{N}$, så utviklingen er unik.