Oppgave 3

La $\{x_n\}_{\mathbb{N}}$ være en følge av reelle tall, $\mathcal{A}$ være Borel σ-algebraen på $\mathbb{R}$ og la $\mu_N : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ være gitt ved

$$\mu_N(A) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_A(x_n).$$

3a

Vis at μ_N er et mål. Hva er $\mu_N(\mathbb{R})$?

3b

La g være en enkel, ikke-negativ funksjon på standard form

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbf{1}_{A_i}(x).$$

Hva blir

$$\int g \, d\mu_N \, ?$$

La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig, ikke-negativ funksjon. Hva blir $\int f \, d\mu_N$?

3c

Anta nå at $x_n \to \bar{x}$ når $x \to \infty$. Regn ut grensen

$$\lim_{\mathbb{N} \to \infty} \int f \, d\mu_N.$$

Oppgave 4

La $(X, \mathcal{A}, \mu)$ være et målrom og la $f : X \to \bar{R}_+$ være en integrabel funksjon. Vis at

$$\mu\left(\{x \in X \mid f(x) \geq t\}\right) \leq \frac{1}{t} \int f \, d\mu.$$

Og at dersom f er p-integrabel

$$\mu\left(\{x \in X \mid f(x) \geq t\}\right) \leq \frac{1}{t^p} \int f^p \, d\mu.$$

SLUTT

(Fortsettes på side 4.)