UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT2400 — Reell analyse
Eksamensdag:	En dag, mai, 2025
Tid for eksamen:	15:00 – 19:00
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

La $\{x_n\}_{\mathbb{N}}$ være en følge av reelle tall, $\mathcal{A}$ være Borel σ-algebraen på $\mathbb{R}$ og la $\mu_N : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ være gitt ved

$$\mu_N(A) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_A(x_n).$$

1a

Vis at μ_N er et mål. Hva er $\mu_N(\mathbb{R})$?

Possible solution: Vi regner ut for A_i disjunkte

$$\begin{aligned}
\mu(\cup_i A_i) &= \frac{1}{N} \sum_{n}^{N} \mathbf{1}_{\cup_i A_i}(x_n) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n}^{N} \sum_{i} \mathbf{1}_{A_i}(x_n) \\
&= \sum_{i} \frac{1}{N} \sum_{n}^{N} \mathbf{1}_{A_i}(x_n) \\
&= \sum_{i} \mu_N(A_i).
\end{aligned}$$

De andre kravene er enkle å vise. $\mu_N(\mathbb{R}) = N/N = 1$.

(Fortsettes på side 2.)

1b

La g være en enkel, ikke-negativ funksjon på standard form

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbf{1}_{A_i}(x).$$

Hva blir

$$\int g \, d\mu_N \, ?$$

La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig, ikke-negativ funksjon. Hva blir $\int f \, d\mu_N$?

Possible solution:

$$\begin{aligned}\int g \, d\mu_N &= \sum_{i=1}^{m} a_i \mu_N(A_i) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbf{1}_{A_i}(x_n) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g(x_n).\end{aligned}$$

La $\{g_k\}$ være en følge av enkle funksjoner som konvergerer uniformt mot f, da blir

$$\int f \, d\mu_N = \int \lim_k g_k \, d\mu_N = \lim_k \int g_k \, d\mu_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n).$$

1c

Anta nå at $x_n \to \bar{x}$ når $n \to \infty$. Regn ut grensen

$$\lim_{N \to \infty} \int f \, d\mu_N.$$

Possible solution: Nå n er stor vil $f(x_n) \approx f(\bar{x})$, så jeg gjetter på at grensen er $f(\bar{x})$, men dette må vises. Velg $M < N$ og la I_N betegne $\int f \, d\mu_N$,

$$\begin{aligned}|I_N - f(\bar{x})| &= \frac{1}{N} \Big| \sum_{n=1}^{N} f(x_n) - f(\bar{x}) \Big| \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{M} |f(x_n) - f(\bar{x})| + \frac{1}{N} \sum_{n=M+1}^{N} |f(x_n) - f(\bar{x})| \\ &\leq \frac{CM}{N} + \frac{1}{N} \sum_{n=M+1}^{N} |f(x_n) - f(\bar{x})| \, .\end{aligned}$$

der

$$C = \sup_n |f(\bar{x}) - f(x_n)| \, .$$

(Fortsettes på side 3.)

Siden $x_n \to \bar{x}$ blir C endelig. Nå velger vi først M så stor at $|f(\bar{x}) - f(x_n)| \leq \varepsilon$ for $n \geq M$. Da får vi

$$|I_N - f(\bar{x})| \leq \frac{CM}{N} + \varepsilon.$$

Tilslutt velger vi N så stor at det første leddet blir mindre enn ε.

Oppgave 2

La $(X, \mathcal{A}, \mu)$ være et målrom og la $f : X \to \bar{\mathbb{R}}_+$ være en integrabel funksjon. Vis at

$$\mu\left(\{x \in X \mid f(x) \geq t\}\right) \leq \frac{1}{t} \int f \, d\mu.$$

Og at dersom f er p-integrabel

$$\mu\left(\{x \in X \mid f(x) \geq t\}\right) \leq \frac{1}{t^p} \int f^p \, d\mu.$$

Possible solution: Vi estimerer

$$\int f \, d\mu \geq \int_{\{f \geq t\}} f \, d\mu \geq t \int_{\{f \geq t\}} d\mu.$$

Videre

$$\mu\left(\{x \in X \mid f(x) \geq t\}\right) = \mu\left(\{x \in X \mid f(x)^p \geq t^p\}\right) \leq \frac{1}{t^p} \int f^p \, d\mu.$$

SLUTT