MAT2400, vår 2025
Obligatorisk oppgave nr. 1.

Innleveringsfrist. Torsdag 20. februar 2025, klokken 14:30, i Canvas (canvas.uio.no).

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist. Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med faglærer senest samme dag som innleveringsfristen.

Kravet for å få godkjent oppgaven er at den er levert inn (i Canvas). Du velger selv hvor mye du vil svare på, og du vil få tilbakemelding på det du har levert. Det viktigste med oppgaven er å få trening i å løse oppgaver, noe som definitivt vil gjøre deg bedre rustet til å takle eksamen når den kommer mot slutten av semesteret.

LYKKE TIL!

Spørsmål 1. La P_n være mengden av alle $n$te-gradspolynomer med rasjonale koeffisienter

$$P_n = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,\ a_i \in \mathbb{Q} \right\},$$

og la P være unionen av disse

$$P = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n.$$

a) Vis at P er tellbar.

Løsningsforslag: P_n er tellbar siden $\mathbb{Q}^{n+1}$ er tellbar, og P er en tellbar union av tellbare mengder.

Sett

$$\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid \ p_n(x) = 0 \text{ for en } p_n \in P\}.$$

$\mathbb{A}$ kalles de algebraiske tallene.

b) Vis at $\mathbb{A}$ er tellbar.

Løsningsforslag: Et $n$te-gradspolynom har høyst n røtter, P tellbar. For hver $p \in P_n$ får vi høyst n elementer i $\mathbb{A}$. Dermed blir $\mathbb{A}$ tellbar.

c) Hva er galt med følgende "bevis" for at $\mathbb{A} \cap [0,1]$ ikke er tellbar: *Anta* $\{a_i\}$ *er en liste av* $\mathbb{A} \cap [0,1]$*, med desimalekspansjon*

$$a_i = 0.d_{i1}d_{i2}d_{i3}d_{i4} \cdots \cdots d_{ii} \cdots .$$

La $s(a) = 1$ *dersom* $a \neq 1$ *og* $s(a) = 2$ *ellers. Da er* $a = 0.s(d_{11})s(d_{22})s(d_{33}) \cdots s(d_{ii}) \cdots$ *ikke med i lista, og* $\mathbb{A}$ *kan derfor ikke være tellbar.* **Hint**: Kan du finne et tall som ikke er algebraisk?

Løsningsforslag: Det er ikke noe galt med resonnementet, det viser at a *ikke* er med i lista over de algebraiske tallene. Altså er $a \in \mathbb{A}^c$.

Spørsmål 2.

a) En funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kalles *konveks* dersom

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ \Rightarrow \ f\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \leq \frac{1}{p}f(x) + \frac{1}{q}f(y),$$

for alle p og q større eller lik 1. Vis at dersom $f''(z) \geq 0$ for $z \in \mathbb{R}$ så er f konveks. **Hint:** Bruk Taylor's formel av grad 1 med restledd.

Løsningsforslag: La $z = x/p + y/q$, siden $f'' \geq 0$ har vi

$$f(x) \geq f(z) + f'(z)(x - z), \quad f(y) \geq f(z) + f'(z)(y - z).$$

Multipliser den første ulikheten med $1/p$ og den andre med $1/q$ og adder.

b) Anta heretter at $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, vis at

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

dersom a og b er ikke-negative tall. **Hint**: Bruk at e^x er konveks.

Løsningsforslag:

$$\begin{aligned} ab &= e^{\ln(a)+\ln(b)} \\ &= \exp\left(\frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q)\right) \\ &\leq \frac{1}{p}e^{\ln(a^p)} + \frac{1}{q}e^{\ln(b^q)} = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q. \end{aligned}$$

For $p \in \mathbb{N}$, la ℓ_p være rommet av alle følger $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ som er slik at $\sum_i |x_i|^p < \infty$.

c) Vis at $\ell_1 \subseteq \ell_p$ for $p \geq 1$.

Løsningsforslag: Anta $x \in \ell_1$. Siden $\sum_i |x_i| < \infty$ så kan vi finne M slik at $|x_i| < 1$ for $i > M$. Derfor

$$\begin{aligned} \|x\|_p^p &\leq \sum_{i=1}^{M} |x_i|^p + \sum_{i=M+1}^{\infty} |x_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^{M} |x_i|^p + \|x\|_1 < \infty, \end{aligned}$$

dvs. $x \in \ell_p$.

For x, $y \in \ell_p$ definér

$$d_p(x, y) = \|x - y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Definér også $x \cdot y = \sum_i x_i y_i$ for $x \in \ell_p$ og $y \in \ell_q$, og $1/p + 1/q = 1$.

d) Vis at

$$|x \cdot y| \leq \|x\|_p \|y\|_q,$$

hvor $\|x\|_p = d_p(x, 0)$. **Hint**: Anta først at $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$.

Løsningsforslag: Vi antar at $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$.

$$\begin{aligned} |x \cdot y| &\leq \sum_i |x_i y_i| \leq \frac{1}{p} \sum_i |x_i|^p + \frac{1}{q} \sum_i |y_i|^q \\ &= \frac{1}{p} \|x\|_p^p + \frac{1}{q} \|y\|_q^q = 1 \\ &= \|x\|_p \|y\|_q . \end{aligned}$$

Hvis $\|x\|_p \neq 1$ sett $\tilde{x} = x/\|x\|_p$ og tilsvarende for y. Ulikheten holder "av seg selv" hvis x eller y er null.

e) Vis trekantulikheten for d_p og konkluder med at d_p er en metrikk.

Løsningsforslag: La $q = p/(p-1)$ slik at $1/p + 1/q = 1$,

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p &\leq \sum_i |x_i + y_i|^{p-1} (|x_i| + |y_i|) \\ &\leq \left(\sum_i |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right)^{1/q} \left(\|x\|_p + \|y\|_p \right) \\ &= \|x + y\|_p^{p-1} \left(\|x\|_p + \|y\|_p \right) . \end{aligned}$$

Dermed oppfyller d_p trekantulikheten. Det er lett å vise at d_p oppfyller de to andre kravene til en metrikk.

For $p = \infty$ definerer vi

$$d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty = \sup_i |x_i - y_i| .$$

f) Vis at d_∞ er en metrikk og at dersom $x \in \ell_1$ gjelder

$$\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty .$$

Løsningsforslag: Det er lett å vise at d_∞ er en norm.

Vi har at

$$\|x\|_\infty^p = \sup_i |x_i|^p \leq \sum_i |x_i|^p = \|x\|_p^p .$$

Derfor blir

$$\liminf_{p \to \infty} \|x\|_p \geq \|x\|_\infty .$$

Vi har også at

$$|x_i|^p = |x_i|^{p-1} |x_i|^1 \leq \|x\|_\infty^{p-1} |x_i| .$$

Fra dette følger

$$\|x\|_p \leq \|x\|_\infty^{1-\frac{1}{p}} \|x\|_1^{\frac{1}{p}}.$$

Dette gir

$$\begin{aligned}\limsup_{p\to\infty} \|x\|_p &\leq \limsup_{p\to\infty} \left(\|x\|_\infty^{1-\frac{1}{p}} \|x\|_1^{\frac{1}{p}} \right) \\ &\leq \limsup_{p\to\infty} \|x\|_\infty^{1-\frac{1}{p}} \limsup_{p\to\infty} \|x\|_1^{\frac{1}{p}} = \|x\|_\infty .\end{aligned}$$

Vi får $\limsup_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty = \liminf_{p\to\infty} \|x\|_p$.

g) Skissér enhetskuleskallet $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_p(x,0) = 1\}$ for $p = 1$, $p = 2$ og $p = \infty$.