MAT2400, vår 2025
Obligatorisk oppgave nr. 2.

Innleveringsfrist. Torsdag 24 april 2025, klokken 14:30, i Canvas (canvas.uio.no).

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist. Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med faglærer senest samme dag som innleveringsfristen.

Kravet for å få godkjent oppgaven er at den er levert inn (i Canvas). Du velger selv hvor mye du vil svare på, og du vil få tilbakemelding på det du har levert. Det viktigste med oppgaven er å få trening i å løse oppgaver, noe som definitivt vil gjøre deg bedre rustet til å takle eksamen når den kommer mot slutten av semesteret.

LYKKE TIL!

Spørsmål 1. La C være mengden av reelle følger $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. For $1 \leq p < \infty$ definerer vi

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \quad \text{og} \quad \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \sup_n |x_n| \,.$$

a)

1 Finn $\boldsymbol{x} \in C$ slik at $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1$, $\|\boldsymbol{x}\|_p = \infty$ for $p < \infty$.
2 Finn $\boldsymbol{x} \in C$ slik at for en gitt $q \in [1, \infty)$

$$\|\boldsymbol{x}\|_p \begin{cases} = \infty & 1 \leq p \leq q, \\ < \infty & q < p \leq \infty. \end{cases}$$

Løsningsforslag: $\boldsymbol{x} = \{1, 1, 1, 1, 1, \ldots\}$ og $x_n = n^{-\frac{1}{q}}$.

b) Finn en følge $\{\boldsymbol{u}_k\}_{k=0}^{\infty} \subset C$ slik at

$$\boldsymbol{u}_k \text{ konvergerer mot } \mathbf{0} \text{ i } \left(C, \|\cdot\|_p\right) \text{ for } 1 < p \leq \infty,$$

og $\boldsymbol{u}_k$ divergerer i $(C, \|\cdot\|_1)$.

Løsningsforslag: Sett $\boldsymbol{u}_k = \{x_{n,k}\}_{n=1}^{\infty}$ der

$$x_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{\ln(\ln(n+1))} \frac{1}{k} & k \leq n, \\ 0 & k > n. \end{cases}$$

Da blir

$$\|\boldsymbol{u}_n\|_p^p \leq \frac{1}{\ln(\ln(n+1))^p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \to 0$$

når $n \to \infty$. $p > 1$. For $p = 1$ får vi at

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u}_n\|_1 &= \frac{1}{\ln(\ln(n+1))} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &\geq \frac{1}{\ln(\ln(n+1))} \int_1^n \frac{1}{t} \, dt \\ &= \frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n+1))} \to \infty \end{aligned}$$

når $n \to \infty$.

c) Er $\|\cdot\|_p$ en norm for $0 < p < 1$? Svaret skal begrunnes.

Løsningsforslag: Sett

$$\boldsymbol{x} = \{1, 0, 0, 0, \ldots\} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{y} = \{0, 1, 0, 0, \ldots\}.$$

Da er $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p = 2^{1/p}$ og $\|\boldsymbol{x}\|_p = \|\boldsymbol{y}\|_p = 1$, så trekantulikheten gjelder ikke.

Spørsmål 2. La H være et komplett indreproduktrom (Hilbertrom) med skalarer $\mathbb{R}$.

a) La $u \in H$, vis at dersom $\langle x, u\rangle = 0$ for alle $x \in H$, så er $u = 0$.

Løsningsforslag: Test med $x = u$.

b) Heretter lar vi $\mathcal{L}(X, Y)$ være rommet av begrensede lineære avbildninger fra X til Y der X og Y er normerte rom. La $u \in H$ og definér $A_u : H \to \mathbb{K}$ ved $A_u(z) = \langle z, u\rangle$. Vis at $A_u \in \mathcal{L}(H) := \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$.

Løsningsforslag: $L(ax + by) = \langle ax + by, u\rangle = a\langle x, y\rangle + b\langle y, u\rangle = aA_u(x) + bA_u(y)$.

c) La $L \in \mathcal{L}(H)$ og sett

$$N = \{z \in H \mid L(z) = 0\}.$$

Vis at N er et lineært underrom av H, og at alle $z \in H$ kan skrives som $z = x + y$ der $y \in N$ og $x \in N^\perp$. Her er

$$N^\perp = \{u \in H \mid \langle u, v\rangle = 0 \text{ for alle } v \in N\} =: M.$$

Merk at siden H et Hilbertrom, så vil også N og M være det.

Løsningsforslag: Vi har at for x og y i N er $L(ax + by) = aLx + bLy = 0$, så $ax + by \in N$. Altså er N et lineært underrom av H. La $P_N : H \to H$ være ortogonalprojeksjoen på N. For $z \in H$ får vi at

$$z = (z - P_N z) + P_N z = x + y, \quad \text{der} \quad x \in M \text{ og } y \in N.$$

d) Vis at for alle $L \in \mathcal{L}(H)$ så fins det én og bare én $u \in H$ slik at

$$L(z) = \langle z, u\rangle.$$

Vektoren u kalles Rieszrepresentasjonen av L.

Løsningsforslag: Observér at $L(z) = L(x+y) = L(x)$ der $M \ni x = \sum_i^\infty \langle x, e_i\rangle e_i$ og $\{e_i\}$ er en ortonormal basis for M. Vi får derfor at

$$\begin{aligned} Lz &= L\Big(\sum_i^\infty \langle z, e_i\rangle e_i\Big) \\ &= \sum_i^\infty \langle z, e_i\rangle Le_i \\ &= \langle z, \sum_i^\infty L(e_i)\, e_i\rangle = \langle z, u\rangle, \end{aligned}$$

der $u = \sum_i^\infty L(e_i)\, e_i$. **b)** impliserer at det bare fins én u slik at $Lz = \langle z, u\rangle$.

Spørsmål 3. La X være det lineære rommet

$$X = \{u \in C([0,1], \mathbb{R}) \mid u' \in C((0,1), \mathbb{R}) \text{ og } u(0) = u(1) = 0\}.$$

Definér indreproduktet og den tilhørende normen på X

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 u(y)v(y)\, dy \quad \text{og} \quad \|u\|_2 = \langle u, u\rangle^{1/2}.$$

a) Vis at for $u \in X$ gjelder at

$$|u(x) - u(y)| \le \sqrt{|x-y|}\, \|u'\|_2,$$

og at

$$C_1 \|u\|_2^2 \le |\langle u', u'\rangle|,$$

for alle $u \in H$ for en konstant C.

Løsningsforslag: Vi har

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &= \Big|\int_x^y u'(\xi)\, d\xi\Big| \\ &\le \int_x^y |u'(\xi)|\, d\xi \\ &\le \Big(\int_x^y 1\, d\xi\Big)^{1/2} \Big(\int_x^y |u'(\xi)|^2\, d\xi\Big)^{1/2} \\ &\le \sqrt{|x-y|}\, \|u'\|_2. \end{aligned}$$

Merk at $(u^2)' = 2uu'$ slik at

$$u^2(x) = \int_0^x 2u(\xi)u'(\xi)\, d\xi \le 2\, \|u\|_2\, \|u'\|_2.$$

Vi integrerer denne i x og får at $\|u\|_2 \le 2\, \|u'\|_2$.

b) Vis at $\langle u, v\rangle_B := \langle u', v'\rangle$ blir et indreprodukt på X.

Løsningsforslag: Det er lett å vise symmetri og lineæritet i hver faktor, og forrige spørsmål gir at $\langle u, u\rangle_B = 0 \Rightarrow u = 0$.

La heretter H være kompletteringen av X mhp. $\|\cdot\|_B$ slik at H er et komplett Hilbertrom med indreprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$.

Vi ønsker å løse differensialligningen/randverdiproblemet

$$-u''(x) = f(x) \quad x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0, \tag{1}$$

der $f \in L^2([0,1])$ er en gitt funksjon.

c) Vis at dersom u er to ganger deriverbar og $u \in X$, så kan problemet (1) omskrives til:

$$B(u, v) := \langle u, v\rangle_B = \langle f, v\rangle \quad \text{for alle } v \text{ i } H. \tag{2}$$

Løsningsforslag: For $v \in H$ har vi at $v \in C([0,1], \mathbb{R})$ og $\int_0^1 (v')^2\, dx < \infty$. Vi multipliserer (1) med $v \in H$ og intrerer over $[0,1]$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)v(x)\, dx &= -\int_0^1 u''(x)v(x)\, dx \\ &= \int_0^1 u'(x)v'(x)\, dx.\end{aligned}$$

Vi ønsker heretter å løse problemet: *Finn $u \in H$ slik at (2) gjelder*, u kalles en *svak løsning* av (1).

d) Vis at det fins én og bare én svak løsning av (1). **Hint:** Bruk **2d)**.

Løsningsforslag: Høyresiden i (2) gir en lineærfunksjonal på H gitt ved $Lv = \langle v, f\rangle$, da gir **2d)** anvendt på Hilbertrommet $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_B)$ at det fins en og bare en $u \in H$ som løser (2).

e) Definér løsningsoperatoren $S : L^2[0,1] \to H$ som avbildningen $f \mapsto u$. Vis at S er lineær og begrenset. Estimér $\|S\|$ når vi ser på S som en lineæravbildning fra $L_2((0,1))$ til $L_2((0,1))$

Løsningsforslag: Vi regner

$$\begin{aligned}\langle S(af + bg), v\rangle_B &= \langle af + bg, v\rangle \\ &= a\langle f, v\rangle + b\langle g, v\rangle \\ &= a\langle Sf, v\rangle_B + b\langle Sg, v\rangle_B \\ &= \langle aSf + bSg, v\rangle_B.\end{aligned}$$

2a) gir at $S(af+bg) = aSf + bSg$. For å estimere normen regner vi

$$\|Sf\|_2^2 \leq 4\langle Sf, Sf\rangle_B = 4\langle f, Sf\rangle \leq 4\,\|f\|_2\,\|Sf\|_2\,,$$

som gir

$$\|S\| = \sup_f \frac{\|Sf\|_2}{\|f\|_2} \leq 4.$$

Spørsmål 4. La X være det normerte rommet $C([0,1];\mathbb{R})$, utstyrt med supremumsnormen. Vi har at X er komplett (skal ikke vises). Definér $F : X \to X$ ved

$$F(x)(t) = x(t) - 2x(0) + \frac{1}{2}\int_0^t \cos(ts)\,(x(s))^2\,ds.$$

Vi ønsker å løse ligningen $F(x) = y$.

a) Vis at $x(t) = 0$ løser ligningen $F(x) = 0$.

Løsningsforslag: Sett inn.

b) Finn $F'(x)$.

Løsningsforslag: Vi regner ut

$$\begin{aligned}\sigma(r)(t) &= F(x+r)(t) - F(x)(t) - F'(x)r(t)\\ &= r(t) - 2r(0) + \frac{1}{2}\int_0^t \cos(ts)\left[(x(s)+r(s))^2 - x(s)^2\right]ds - F'(x)r(t)\\ &= r(t) - 2r(0) + \int_0^t \cos(ts)r(s)x(s)\,ds - F'(x)r(t) + \frac{1}{2}\int_0^t \cos(ts)r(s)^2\,ds.\end{aligned}$$

Vi har at

$$\left\|\frac{1}{2}\int_0^t \cos(ts)r(s)^2\,ds\right\| \leq \frac{1}{2}\,\|r\|^2\,.$$

Derfor blir

$$F'(x)r(t) = r(t) - 2r(0) + \int_0^t \cos(ts)r(s)x(s)\,ds.$$

c) Definér $A = (F'(0))$ og vis at $A^2 = I$ ($\Rightarrow A = A^{-1}$), og at $\|A\| = 3$.

Løsningsforslag: Vi regner

$$\begin{aligned}A^2r(t) &= A(r(t) - 2r(0)) = As(t) \qquad s(t) = r(t) - 2r(0)\\ &= s(r) - 2s(0) = r(t).\end{aligned}$$

Vi har at

$$\|Ar\| \leq 3\,\|r\|$$

slik at $\|A\| \leq 3$. Velg deretter $r(t) = -\cos(\pi t)$, da blir $\|Ar\| = \|r(\cdot) + 2\| = 3$, og derfor blir $\|A\| \geq 3$.

d) Vis at

$$\|A - F'(x)\| \leq \|x\|\,.$$

Løsningsforslag:

$$\begin{aligned} |Ar(t) - F'(x)r(t)| &= \left| \int_0^t \cos(ts)x(s)r(s)\,ds \right| \\ &\leq \|x\|\,\|r\|\,. \end{aligned}$$

e) For $y \in X$ lar vi $T_y : X \to X$ være definert ved

$$T_y(x) = x - A(F(x) - y).$$

Finn en $r > 0$ slik at $\|T_y(x_1) - T_y(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\,\|x_1 - x_2\|$ for $\|x_1\|$ og $\|x_2\|$ mindre enn r. Finn så en $\rho > 0$ slik at $T_y(B(0,r)) \subset B(0,r)$ for $\|y\| < \rho$. Konkludér med at F har en invers for $y \in B(0,\rho)$.

Løsningsforslag: Vi har at $T(x) = A(Ax - F(x)) + Ay$, og dermed $T'(x) = A(A - F'(x))$ som igjen medfører at

$$\|T'(x)\| \leq \|A\|\,\|x\| = 3\,\|x\|\,.$$

Middelverdisetningen gir da at for $\|x_i\| < \frac{1}{6}$, $i = 1, 2$, får vi at

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| \leq \max_{x \in B(0,1/6)} \|T'(x)\|\,\|x_1 - x_2\| \leq \frac{1}{2}\,\|x_1 - x_2\|\,.$$

Vi har at $\|Ay\| \leq 3\,\|y\|$, så vi kan velge $\rho = r/6$. Da kan vi bruke Banachs fikspunktsteorem og konkludere at T har et fikspunkt $x = x(y)$ for alle $y \in B(0, 1/36)$. Dermed blir $G(y) = x(y)$ en invers for F.