Spørsmål 1. La P_n være mengden av alle $n$te-gradspolynomer med rasjonale koeffisienter

$$P_n = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,\ a_i \in \mathbb{Q} \right\},$$

og la P være unionen av disse

$$P = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n.$$

a) Vis at P er tellbar.

Chat GPT-4 Omni:
Mengden P er en tellbar union av tellbare mengder P_n. Hver P_n er tellbar fordi det er et (n+1)-tupelet produkt av de tellbare mengdene av rasjonale tall. Dermed er P tellbar.

Sett

$$\mathbb{A} = \{ x \in \mathbb{R} \mid \ p_n(x) = 0 \text{ for en } p_n \in P \}.$$

$\mathbb{A}$ kalles de algebraiske tallene.

b) Vis at $\mathbb{A}$ er tellbar.

Chat GPT-4 Omni: Mengden $\mathbb{A}$ er mengden av røttene til polynomer i P, og fordi hvert polynom har et endelig antall røtter og P er tellbar, er $\mathbb{A}$ tellbar.

c) Hva er galt med følgende "bevis" for at $\mathbb{A} \cap [0,1]$ ikke er tellbar: *Anta* $\{a_i\}$ *er en liste av* $\mathbb{A} \cap [0,1]$, *med desimalekspansjon*

$$a_i = 0.d_{i1}d_{i2}d_{i3}d_{i4} \cdots \cdots d_{ii} \cdots .$$

La $s(a) = 1$ *dersom* $a \neq 1$ *og* $s(a) = 2$ *ellers. Da er* $a = 0.s(d_{11})s(d_{22})s(d_{33}) \cdots s(d_{ii}) \cdots$ *ikke med i lista, og* $\mathbb{A}$ *kan derfor ikke være tellbar.* **Hint**: Kan du finne et tall som ikke er algebraisk?

Chat GPT-4 Omni: Feilen er at det bruker Cantor's diagonalprosedyre på $\mathbb{A} \cap [0,1]$, som er tellbar, fordi alle algebraiske tall kan være liste som røttene til tellbare mange polynomer med rasjonelle koeffisienter.

Spørsmål 2.

a) En funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kalles *konveks* dersom

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \;\Rightarrow\; f\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \leq \frac{1}{p}f(x) + \frac{1}{q}f(y),$$

for alle p og q større eller lik 1. Vis at dersom $f''(z) \geq 0$ for $z \in \mathbb{R}$ så er f konveks. **Hint:** Bruk Taylor's formel av grad 1 med restledd.

Chat GPT-4 Omni: Taylor-formelen viser at hvis $f''(z) \geq 0$, da er $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(\xi)$. Siden $f''(\xi) \geq 0$, er f konveks.

b) Anta heretter at $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, vis at

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

dersom a og b er ikke-negative tall. **Hint**: Bruk at e^x er konveks.

Chat GPT-4 Omni: Ulikheten $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ følger fra konveksiteten til eksponentialfunksjonen e^x, anvendt på $x = \log(a)$ og $y = \log(b)$.

For $p \in \mathbb{N}$, la ℓ_p være rommet av alle følger $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ som er slik at $\sum_i |x_i|^p < \infty$.

c) Vis at $\ell_1 \subseteq \ell_p$ for $p \geq 1$.

Chat GPT-4 Omni: Funksjonen ℓ_1 med $\sum_i |x_i| < \infty$ er inneholdt i ℓ_p siden om $\sum_i |x_i| < \infty$, følger $\sum_i |x_i|^p < \infty$ for $p \geq 1$.

For x, $y \in \ell_p$ definér

$$d_p(x,y) = \|x-y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Definér også $x \cdot y = \sum_i x_i y_i$ for $x \in \ell_p$ og $y \in \ell_q$, og $1/p + 1/q = 1$.

d) Vis at

$$|x \cdot y| \leq \|x\|_p \|y\|_q ,$$

hvor $\|x\|_p = d_p(x,0)$. **Hint**: Anta først at $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$.

Chat GPT-4 Omni: Ved antakelse $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$, anvend Holder's ulikhet: $\sum |x_i y_i| \leq (\sum |x_i|^p)^{1/p} (\sum |y_i|^q)^{1/q}$.

e) Vis trekantulikheten for d_p og konkluder med at d_p er en metrikk.

Chat GPT-4 Omni: Trekantulikheten for d_p følger fra Minkowski ulikhet: $(\sum |x_i + y_i|^p)^{1/p} \leq (\sum |x_i|^p)^{1/p} + (\sum |y_i|^p)^{1/p}$.

For $p = \infty$ definerer vi

$$d_\infty(x,y) = \|x-y\|_\infty = \sup_i |x_i - y_i| .$$

f) Vis at d_∞ er en metrikk og at dersom $x \in \ell_1$ gjelder

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty .$$

Chat GPT-4 Omni: For ℓ_1, $d_\infty(x,y)$ er $\sup_i |x_i - y_i|$ og følger trekantulikhet. Dessuten, hvis $x \in \ell_1$, føres $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ av x.