

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i MAT2410 — Innføring i kompleks analyse

Eksamensdag: Tuesday, 30. November, 2020

Tid for eksamen: 15:00 – 19:00

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg: None.

Tillatte hjelpemidler: Alle

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 (vekt 30%)

Hvor mange nullpunkter har polynomet

$$p(z) = z^8 + z + 1$$

i området

$$D = \left\{ z \mid 0 < |z| < 2, 0 < \operatorname{Arg}(z) < \frac{\pi}{2} \right\}?$$

Svaret skal begrunnes.

Oppgave 2 (vekt 20%)

2a

La

$$h(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Hva blir $h(\{|z| < 1\})$?

2b

Definer

$$f(z) = \operatorname{Log}(h(z)),$$

der Log betegner prinsipalgrenen av logaritmen. Vis at f er analytisk for $|z| > 1$.

2c

Finn Laurentrekka til f om $z = 0$ slik at rekka konvergerer for $|z| > 1$.

(Fortsettes på side 2.)

2d

Regn ut

$$\oint_{|z|=2} f(z) dz.$$

Oppgave 3 (vekt 20%)Anta at f er en hel funksjon som tilfredstiller

$$|f(z_1 + z_2)| \leq |f(z_1)| + |f(z_2)|$$

for alle z_1 og z_2 .**3a**

Sett

$$M = \max_{|z|=1} |f(z)|.$$

Vis at

$$|f(z)| \leq nM$$

for alle z og alle positive heltall $n \geq |z|$.**3b**Vis at f er et polynom av grad 0 eller 1. (**Hint:** Bruk Cauchy's integralsats for konturen $|\zeta| = n$.)**Oppgave 4 (vekt 20%)**La z^α være en gren som er diskontinuerlig langs den positive realaksen, dvs.

$$z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg(z)}, \quad 0 \leq \arg(z) < 2\pi,$$

for $0 \leq \alpha < 1$. Sett

$$f(z) = \frac{z^\alpha}{z^2 + 1}.$$

4aFinn alle singularitetene til f og de tilhørende residuene.**4b**

Regn ut

$$I = \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^2 + 1} dx.$$

THE END