MAT2500 høsten 2009

Løsningsforslag til Obligatorisk oppgavesett 1

Oppgave 1

a): En parameterframstilling er for eksempel

$$A + t(B - A) = (1 + t, 2 + t, 3 - 2t),$$

der $t \in \mathbb{R}$.

b): Arealet av trekanten er

$$\frac{1}{2}\sqrt{|B - A|^2|C - A|^2 - ((B - A) \cdot (C - A))^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(1 + 1 + 4)(4 + 1 + 1) - (2 - 1 + 2)^2} = \sqrt{27} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

La $ax + by + cz = d$ være likningen til et plan. For at planet skal gå gjennom A, B og C må vi ha

$$a + 2b + 3c = d$$

$$2a + 3b + c = d$$

$$3a + b + 2c = d$$

Løsningen av dette likningssystemet er $a = b = c = 6d$, så en likning for planet er $x + y + z = 6$. Linja gjennom origo og $(1, 1, 1)$ står derfor perpendikulært på planet. Denne linja har parameterframstilling (t, t, t) og skjærer planet i punktet $P = (2, 2, 2)$. Avstanden fra origo til planet er $|P| = 2\sqrt{3}$.

Oppgave 2

a): Sett $a = |B - A|$ og $b = |C - B|$. Antakelsen er at $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$, som gir $a^2 - ab - b^2 = 0$. Sett $\phi = \frac{a}{b}$. Vi får at ϕ tilfredsstiller ligningen $\phi^2 - \phi - 1$, som gir $\phi = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Siden både a og b er positive, er ϕ positiv, så det gylne forhold ϕ er lik $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

b): Radien i sirkelen er lik $b+\frac{a}{2}$. Bruker vi Pytagoras' setning på den rettvinklede trekanten med $\frac{a}{2}$ som grunnlinje, a som høyde og $b + \frac{a}{2}$ som hypotenus, får vi at a og b tilfredsstiller $a^2 + \frac{a^2}{4} = b^2 + ab + \frac{a^2}{4}$, som gir $a^2 - ab - b^2 = 0$. Som i a) følger det da at $\frac{a}{b} = \phi$.

c): I en likesidet trekant er sirkumsenteret O lik barysenteret (sentroiden) G lik ortosenteret H lik innsenteret I, siden midtnormalene på sidekantene er det samme som medianene, og det samme som høydene, og det samme som halveringslinjene til vinklene.

La trekanten være ABC. Sett $A' = \frac{1}{2}(B+C)$, $B' = \frac{1}{2}(A+C)$, $C' = \frac{1}{2}(A+B)$,og la $D = \frac{1}{2}(B'+C')$. Trekanten $AC'B'$ er likesidet, med sidekanter av lengde t og høyde $|D-A| = \frac{1}{2}\sqrt{3}t$. Vi vet at $|C'-O| = \frac{1}{3}|A'-A| = \frac{1}{3}\sqrt{3}t$. De rettvinklede trekantene $AC'O$, ADC' og $C'DO$ er formlike (alle har vinklene $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/6$). Av dette utleder vi at radien i den omskrevne sirkelen er $|A-O| = 2|C'-O| = \frac{2}{3}\sqrt{3}t$ og $|D-O| = \frac{1}{2}|C'-O| = \frac{1}{3}\sqrt{3}t$. La E være et av endepunktene til korden. Pytagoras' setning anvendt på trekanten EDO gir

$$(\frac{2}{3}\sqrt{3}t)^2 = (\frac{1}{6}\sqrt{3}t)^2 + (\frac{1}{2}t+s)^2.$$

Dette gir $t^2 = ts + s^2$, og følgelig er $t/s = \phi$.

Oppgave 3

Betrakt firkanten $BEFD$ (se Figur 2). Siden $< DEB = \pi/2$, ligger E på en halvsirkel med BD som diameter. Men siden $< DFB = \pi/2$, ligger også F på denne halvsirkelen. Altså er firkanten$BEFD$ syklisk. Siden DF er en korde i sirkelen og B og E ligger på sirkelen, er vinklene $< FBD$ og $< FED$ like store. Av tilsvarende grunn er vinklene $< BDE$ og $< BFE$ like store.

Vinklene $< AFD$ og $< DGA$ er begge $\pi/2$, så firkanten $FAGD$ er syklisk (med AD som en diameter). Det følger da at vinklene $< AFG$ og $< ADG$ er like.

Punktene E, F og G er kolineære hvis og bare hvis $< AFG =< BFE$. Firkantene $BCAD$ og $ECGD$ er begge sykliske, så i hver av dem er summen av to motstående vinkler lik π. Siden $< BDA$ og $< EDG$ er motstående (i hver sin firkant) til samme vinkel, nemlig $< C$, er de like store. Vi får da

$$< BDA =< BDE+ < EDA =< EDG =< EDA+ < ADG$$

så $< BDE =< ADG$. Men $< BDE =< BFE$ og $< ADG =< AFG$, så vi har vist det vi ville.