# Obligatorisk oppgave 2 - MAT2500 høst 2010

I dette oppgavesettet betyr polyeder et 3-dimensjonalt konvekst polyeder. Hvis $K$ er et polyeder, la $V_K$ være mengden av hjørner, $E_K$ mengden av kanter og $F_K$ mengden av sideflater. To 3-dimensjonale konvekse polyedre, $K$ og $K'$, kalles *kombinatorisk like* eller av *samme kombinatoriske type* hvis det fins bijeksjoner $\phi_V : V_K \to V_{K'}$, $\phi_E : E_K \to E_{K'}$ og $\phi_F : F_K \to F_{K'}$ som bevarer inklusjon. Dvs at et hjørne $h$ er i en kant $k$ hvis og bare hvis $\phi_V(h) \in \phi_E(k)$ og at en kant $k$ er i en sideflate $s$ hvis og bare hvis $\phi_E(k) \subset \phi_F(s)$.

**Oppgave 1.** Vis at det å være kombinatorisk like er en ekvivalensrelasjon på mengden av polyedre.

Et polyeder kalles *simplisialt* hvis alle sideflater er trekanter. Merk at den kombinatoriske typen til et simplisialt polyeder er bestemt ved å skrive opp for hver sideflate mengden av de tre hjørner i sideflaten. Da vil kantene svare til alle undermengder av slike sideflatemengder med 2 elementer og hjørnene vil være unionen av alle sideflatemengder. For eksempel tetraederet beskrives kombinatorisk ved å skrive opp

$$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}\,.$$

De 6 kantene vil da være $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$ og hjørnemengden er $\{1,2,3,4\}$.

**Oppgave 2.** Hvis $K$ er et simplisialt polyeder, uttrykk antall sideflater, $f$, som en funksjon av antall hjørner $v$. Gjør det samme for antall kanter $e$.

**Oppgave 3.** Beskriv, gjerne med en tegning, alle kombinatoriske typer av simplisiale polyedre med antall hjørner $v \leq 6$. (Hint: Det er bare 4, 1 med 4 hjørner, 1 med 5 hjørner og 2 med 6 hjørner.)

**Oppgave 4.** Realiser de typene du fant i oppgave 3 i $E^3$. Dvs for hver type, gi $v$ hjørner i koordinanter i $E^3$ slik at den konvekse innhyllingen av disse hjørnene er av denne kombinatoriske typen.

En affin transformasjon $T$ av planet $\mathbb{R}^2$ kalles en *dilasjon* hvis for alle linjer $\ell$ i planet, $T(\ell) = \ell$ eller $T(\ell)$ er parallell med $\ell$.

**Oppgave 5.** Vis at en dilasjon som har to forskjellige fikspunkter må være identiteten.

**Oppgave 6.** La $T$ være en dilasjon med ett fikspunkt $C$ (som kalles senteret til dilasjonen). Vis at $T$ kan skrives på formen

$$T(P) = C + \lambda(P - C)$$

for en passende $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Hva må en dilasjon uten fikspunkter være?