UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT2500 — Geometri
Eksamensdag:	Onsdag 17. desember 2014
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg:	ingen
Tillatte hjelpemidler:	ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver teller like mye.

Oppgave 1

Det konvekse polyederet P har 8 sideflater, 4 sekskanter og 4 trekanter.

1a

Hvor mange kanter har P? Hvor mange hjørner har P? Forklar hvordan du kommer fram til svarene.

1b

Vis at der må være akkurat tre sideflater inn til hvert hjørne i P.

1c

Et eksempel på et slikt polyeder P kan en få ved å skjære av hjørnene til et bestemt platonsk legeme. Forklar hvilket platonsk legeme dette er og hvordan hjørnene må skjæres av.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

2a

La P være et punkt på den omskrevne sirkelen til en trekant $\triangle ABC$. Anta at PA står normalt på AB. Vis at PC står normalt på BC. (Hint: Vis at BP er en diameter).

2b

La P være et punkt mellom B og C på den omskrevne sirkelen til en trekant $\triangle ABC$. Anta at $\angle PCA > \pi/2$. Normalen fra P ned på siden AB har fotpunkt F, normalen fra P ned på siden BC har fotpunkt D og normalen fra P ned på forlengelsen av siden AC har fotpunkt E.
Vis at

$$\angle PAB = \angle PCB, \quad \angle PBC = \angle PAC \quad \text{og} \quad \angle PBA = \pi - \angle PCA.$$

Vis at

$$\begin{aligned}
&AF = PA \cdot \cos\angle PAB, && BF = PB \cdot \cos\angle PBA, \\
&BD = PB \cdot \cos\angle PBC, && CD = PC \cdot \cos\angle PCB, \\
&CE = PC \cdot \cos\angle PCE = -PC \cdot \cos\angle PCA, && AE = PA \cdot \cos\angle PAC.
\end{aligned}$$

2c

Vis at punktene D, E og F i b) ligger på linje.

Oppgave 3

Gitt to rette linjer definert av ligningene

$$2x - 3y + 3 = 0 \quad \text{og} \quad 2x - 3y - 3 = 0.$$

La l være ei linje gjennom origo som skjærer den første linja i A og den andre i B. Trekk ei linje gjennom A parallell med x-aksen og gjennom B parallell med y-aksen. Finn det geometriske stedet for skjæringspunktet mellom disse parallellene når l dreier seg om origo.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 4

La $(x_0 : x_1 : x_2)$ være homogene koordinater i det projektive planet.

4a

Finn ligningen til linja gjennom punktene

$$A = (1 : 1 : 0) \quad \text{og} \quad B = (0 : 1 : 1),$$

og koordinatene til skjæringspunktene mellom denne linja og kjeglesnittet i det projektive planet med likning

$$x_0^2 + x_0x_1 - x_1x_2 - 7x_2^2 = 0.$$

4b

Finn likningen til en tangent til kjeglesnittet på formen $x_0 - ax_2 = 0$.

SLUTT

LØSNINGSFORSLAG – EKSAMEN 17. DES 2014

1. a) Hver kant går mellom to hjørner så antall kanter $\underline{k} = \frac{4\times 6 + 4\times 3}{2} = \underline{18}$

Av Eulers formel vil antall sideflater f, antall kanter k og antall hjørner h, tilfredsstille

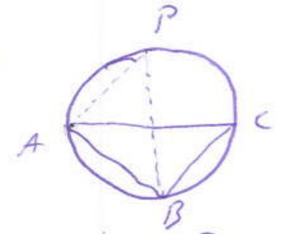
$$f - k + h = 2 \quad \text{så} \quad \underline{h} = 2 - f + k = \underline{12}$$

b) Hvis der i hjørne i er a_i sideflater, er $a_i \geq 3$ og

$$\sum_{i=1}^{12} a_i = 4\times 6 + 4\times 3 = 36, \text{ så } a_i = 3 \text{ for alle } i$$

c) Kutt hjørnene i et tetraeder slik at hver kant deles i 3, så får en et polyeder med 4 nye trekanter, mens de gamle trekantene blir til 4 sekskanter.

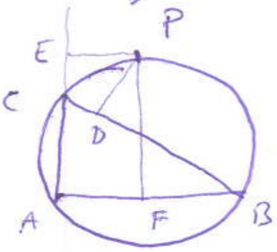
2 a)



$PA \perp AB \Rightarrow PB$ diameter (periferivinkelsetningen)

PB diameter $\Rightarrow PC \perp BC$ (periferivinkelsetningen)

b)



$\angle PAB = \angle PCB$ periferivinkelsetningen

$\angle PBC = \angle PAC$ — " —

$\angle PBA = \pi - \angle PCA$: Sirkelbuene de to vinklene spenner over er tilsammen hele sirkelen.

$$PF \perp AF \Rightarrow AF = PA \cos\angle PAB$$
$$PF \perp BF \Rightarrow BF = PB \cos\angle PBA$$
$$PD \perp BD \Rightarrow BD = PB \cos\angle PBC$$
$$PD \perp CD \Rightarrow CD = PC \cos\angle PCB$$
$$PE \perp CE \Rightarrow CE = PC \cos\angle PCE$$
$$PE \perp AE \Rightarrow AE = PA \cos\angle PAC$$
$$\angle PCA = \pi - \angle PCE \Rightarrow \cos\angle PCE = -\cos\angle PCA.$$

c) $\cancel{\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} < 0}$ ~~siden E ligger utenfor, D, F innenfor tre kantene.~~

~~av b):~~ $\cancel{\frac{AF}{FB}\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA} = \frac{PA}{PB}\frac{PB}{PC}\frac{PC}{PA}\frac{\cos\angle PAB}{\cos\angle PBA}\cdot\frac{\cos\angle PBC}{\cos\angle PCB}\frac{-\cos\angle PCA}{\cos\angle PAC} =}$

c) $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} < 0$ siden E ligger utenfor mens D, F ligger innenfor trekanten.

av b) $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{PA}{PB} \frac{PB}{PC} \frac{PC}{PA} \cdot \frac{\cos\angle PAB}{\cos\angle PBA} \cdot \frac{\cos\angle PBC}{\cos\angle PCB} \cdot \frac{-\cos\angle PCA}{\cos\angle PAC}$

$$= \frac{\cos\angle PAB}{\cos\angle PCB} \cdot \frac{\cos\angle PBC}{\cos\angle PAC} \cdot \frac{-\cos\angle PCA}{\cos(\pi - \angle PCA)} = 1$$

så av Menelaos' setning er D, E, F kollineære.

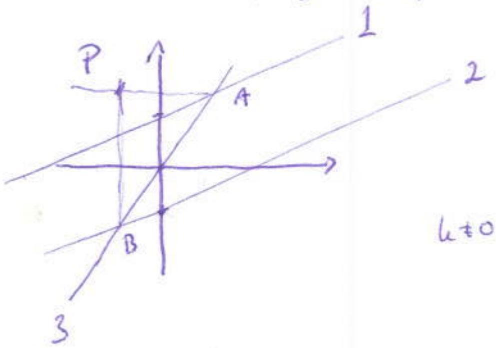
---

3 Linje 1: $2x - 3y + 3 = 0$

Linje 2: $2x - 3y - 3 = 0$

varierende Linje 3: $y = kx$ (og linje $x = 0$).

$P = (x_P, y_P)$ på det geometriske stedet



$2x_A - 3y_A + 3 = 0 \quad y_A = kx_A$

$2x_B - 3y_B - 3 = 0 \quad y_B = kx_B$

$x_P = x_B \; , \; y_P = y_A$

$k \neq 0 \quad x_A = \frac{y_A}{k} \Rightarrow \frac{2y_A}{k} - 3y_A + 3 = 0 \Rightarrow y_A = y_P = \frac{3k}{3k-2}$

$y_B = kx_B \Rightarrow 2x_B - 3kx_B - 3 = 0 \Rightarrow x_B = x_P = \frac{3}{2-3k}$

$\Rightarrow 3k = \frac{2x_P - 3}{x_P} \Rightarrow y_P = \frac{2x_P - 3}{-3} \Rightarrow 2x_P + 3y_P - 3 = 0$

$k = 0$: $(x_P, y_P) = (\frac{3}{2}, 0)$ } ligger på linja $2x + 3y - 3 = 0$
linja $x = 0$: $(x_P, y_P) = (0, 1)$

$\rightarrow$ Det geometriske stedet er linja $2x + 3y - 3 = 0$.

4 a Linja gjennom $(1:1:0)$ og $(0:1:1)$ har ligning $\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x_0 - x_1 +$

Denne skjærer kjeglesnittet $x_0^2 + x_0 x_1 - x_1 x_2 - 7x_2^2 = 0$ der

$x_0 = x_1 - x_2$: $(x_1 - x_2)^2 + x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_2 - 7x_2^2 = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - 6x_2^2 =$

$\Rightarrow x_1 = -x_2$ eller $x_1 = 3x_2$, altså i $(-2:-1:1)$ og $(2:3:1)$

b) Linja $x_0 - ax_2 = 0$ tangerer kjeglesnittet når der bare er ett snittpunkt: $a^2x_2^2 + ax_1x_2 - x_1x_2 - 7x_2^2 = x_2\left((a^2-7)x_2 + (a-1)x_1\right) = 0$

Bare en løsning når $a = 1$ $(x_2 = 0)$. $x_0 - x_2 = 0$ tangerer kjeglesnittet.