2011 nr. 4

$A = (1:0:0) \quad B = (0:1:0) \quad C = (0:0:1) \quad$ i $\mathbb{P}^2$

$l_0 : x_0 = 0 \quad l_1 : x_1 = 0 \quad l_2 : x_2 = 0$

$P \in l_0 \Rightarrow P = (0:\alpha:\beta) \quad P \neq B, C \Rightarrow \alpha\beta \neq 0$

så $P = (0 : \frac{\alpha}{\alpha} : \frac{\beta}{\alpha}) = (0:1:a)$ der $a = \frac{\beta}{\alpha} \neq 0.$

tilsvarende $Q \in l_1,\ Q \neq A, C \Rightarrow Q = (b:0:1) \quad b \neq 0.$

og $R \in l_2,\ R \neq A, B \Rightarrow R = (1:c:0) \quad c \neq 0.$

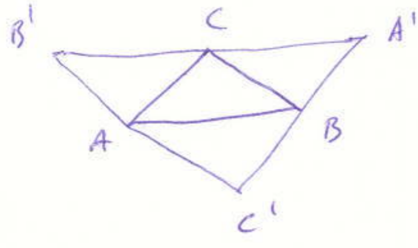
P, Q, R ligger på linje $\Leftrightarrow \lambda_1(0:1:a) + \lambda_2(b:0:1) + \lambda_3(1:c:0) = (0:$

for $(\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3) \neq (0:0:0)$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ b & 0 & 1 \\ 1 & c & 0 \end{vmatrix} = \underline{1 + abc = 0}$$

2012 nr. 1

a)



$AB \parallel A'B'$ og $BC \parallel B'C'$

$\Rightarrow ABCB'$ er et parallellogram.

tilsvarende er $ABA'C$ et parallellogram.

så $\angle ABC = \angle A'B'C'$ og $\angle CAB = \angle C'A'B'$

og $A'B' = A'C + CB' = 2AB$.

Derfor er ΔABC og $\Delta A'B'C'$ formlike og

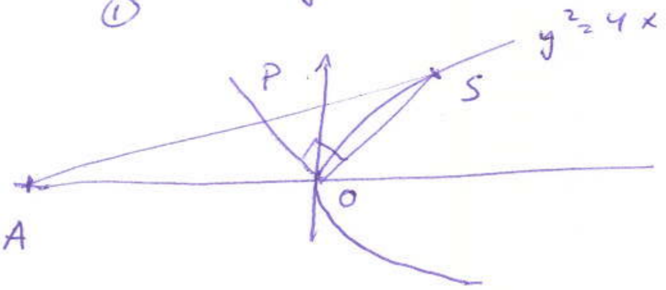
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{1}{2}$$

b) $$\frac{\overline{B'A}}{\overline{AC'}} \cdot \frac{\overline{C'B}}{\overline{BA'}} \cdot \frac{\overline{A'C}}{\overline{CB'}} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$ så

av Ceva's setning konkurrerer AA', BB' og CC'

2012 2

(1) $y^2 = 4x$ $A = (-12, 0)$



$S = (x_s, y_s)$

$P = (x_p, y_p)$

Likning for OS : $x_p x + y_p y = 0$ (x_p, y_p) normal til linja.

Så $^{(1)}\ y_s^2 = 4x_s$, $^{(2)}\ x_p x_s + y_p y_s = 0$

AS: $\dfrac{y_p - 0}{x_p + 12} = \dfrac{y_s - 0}{x_s + 12} \Rightarrow {}^{(3)}\ y_p x_s + 12 y_p = x_p y_s + 12 y_s$

Eliminerer x_s, y_s :

$^{(1)}\ x_s = \frac{1}{4} y_s^2$, $^{(2)}\ \frac{1}{4} x_p y_s^2 + y_p y_s = 0 \Rightarrow y_s = 0$

eller $y_s = -\dfrac{4y_p}{x_p}$

(3) : $y_p \cdot (\frac{1}{4} y_s^2) + 12 y_p = x_p y_s + 12 y_s$

$\Rightarrow \frac{1}{4} y_p \dfrac{16 y_p^2}{x_p^2} + 12 y_p = -4 y_p - 48 \dfrac{y_p}{x_p}$ $\cdot\, x_p^2$

Så $y_p = 0$ eller $4y_p^2 + 16 x_p^2 + 48 x_p = 0$

i.e. $4x_p^2 + 12 x_p + 9 + y_p^2 = 9$

$$\frac{(x_p + \frac{3}{2})^2}{(\frac{3}{2})^2} + \frac{y_p^2}{9} = 1$$

~~$y_s \neq 0 \Rightarrow x_s \neq 0$ og (x_p, y_p) er ikke definert; $y_p = 0$ gir heller ikke noe~~

Dette er ligningen til en ellipse med sentrum i $(-\frac{3}{2}, 0)$, store halvakse er 3 parallell med y-aksen og lille halvakse er $\frac{3}{2}$ parallell med x-aksen.

$y_s = 0$ eller $y_p = 0$ gir ikke noe punkt på det geometriske stedet

NB: Det geometriske stedet ligger på ellipsen, men er ikke hele ellipsen.

2 ② Symmetri linjene til ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ellipsen er

$y = 0$ (x-aksen)

og $x = -\frac{3}{2}$.

2012 .3

$(x_0 : x_1 : x_2)$ koordinater i $\mathbb{P}^2$

1) l_a: linja fra $A = (1:0:2)$ til $B_a = (0:2:a)$

har ligning $\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix} = 0$

altså $-4x_0 - ax_1 + 2x_2 = 0$

2) l_{-1} har ligning $-4x_0 + x_1 + 2x_2 = 0$, og skjærer kjeglesnittet $x_0x_1 - x_2^2 = 0$ i punkter med koordinater bestemt av de to likningene:

$x_1 = 4x_0 - 2x_2$

innsatt $x_0(4x_0 - 2x_2) - x_2^2 = 0$

$4x_0^2 - 2x_0x_2 - x_2^2 = 0$

$x_2^2 + 2x_0x_2 - 4x_0^2 = 0$

$x_2 = (1 \pm \sqrt{1+4})x_0 = (1 \pm \sqrt{5})x_0$

$\Rightarrow x_1 = 4x_0 - 2x_2 = (4 - 2(1 \pm \sqrt{5}))x_0$

$= \begin{cases} (2 - 2\sqrt{5})x_0 \\ (2 + 2\sqrt{5})x_0 \end{cases}$

Skjæringspunkt: $(1 : 2 - 2\sqrt{5} ; 1 + \sqrt{5})$

og $(1 : 2 + 2\sqrt{5} : 1 - \sqrt{5})$

(hvis $x_0 = 0$, er $x_1 = x_2 = 0$ som ikke ~~[illegible]~~ er løsning i $\mathbb{P}^2$)

3 ③

l_a tangerer kjeglesnittet $x_0x_1 - x_2^2 = 0$
når skjæringspunktene faller sammen.

$$l_a : \quad 2x_2 = 4x_0 + a x_1$$

skjærer $x_0x_1 - x_2^2 = 0$ når

$$x_0 x_1 = \left(2x_0 + \tfrac{a}{2} x_1\right)^2$$

dvs. $4x_0^2 + (2a-1)\, x_0x_1 + \frac{a^2}{4} x_1^2 = 0$

skjæringspunktene faller sammen når

$$(2a-1)^2 = 4 \cdot 4 \cdot \frac{a^2}{4}$$

$$4a^2 - 4a + 1 = 4a^2 \quad = 1 \quad \underline{\underline{a = \tfrac{1}{4}}}$$

<u>2013</u> <u>nr 3</u> $(x_0 : x_1 : x_2)$ koordinater i $\mathbb{P}^2$

a) $l_a : \; a x_0 - x_1 = 0$

$a x_0 - x_1 = 0$ $\qquad a \neq a'$

$a' x_0 - x_1 = 0$

har løsning $\begin{vmatrix} i & j & k \\ a & -1 & 0 \\ a' & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0 : 0 : a'-a) = \underline{(0:0:1)}$

Så $(0:0:1)$ er felles punkt på linjene l_a.

b) l_a snitter $x_0x_2 - x_1^2 = 0$ der $x_1 = a x_0$

dvs $x_0x_2 - a^2x_0^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$ eller $x_2 = a^2 x_0$

$x_0 = 0 \to x_1 = 0, \; x_2 \neq 0$

$x_2 = a^2 x_0, \; x_1 = a x_0$

} skjæringspunktene mellom l_a og kjeglesnittet $x_0x_2 - x_1^2 = 0$

er $(0:0:1)$ og $(1:a:a^2)$

$x_0 = 0$ $\qquad x_0 \neq 0.$

c)

$C: \ 3x_0^2 + 2x_0x_1 - x_1^2 - 4x_2^2 = 0$

$\underline{x_2 = 0}$: $\Rightarrow \quad 3x_0^2 + 2x_0x_1 - x_1^2 = 0$

diskriminanten $\quad 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 4 + 12 = 16 > 0$

så der er $\underline{2}$ skjæringspunkter mellom

C og linja $x_2 = 0$.

I det affine planet $x_2 \neq 0$ vil derfor

kjeglesnittet være en <u>hyperbel</u>.

(C er ikke degenerert siden dens symmetriske

matrise $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ har determinant $16 \neq$