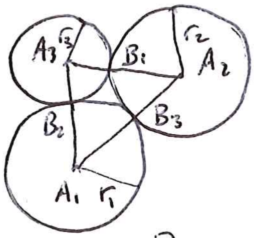
LØSNINGSFORSLAG MAT 2500 EX 14.12.16

1 a



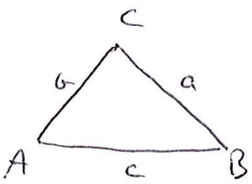
Bruker Ceva's setning til å vise at A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 har et felles punkt:

Regner på $\frac{\overline{A_1B_3}}{\overline{B_3A_2}} \frac{\overline{A_2B_1}}{\overline{B_1A_3}} \frac{\overline{A_3B_2}}{\overline{B_2A_1}}$

siden alle brøkene er positive $\Rightarrow = \frac{A_1B_3}{B_3A_2} \frac{A_2B_1}{B_1A_3} \frac{A_3B_2}{B_2A_1} = \frac{r_1}{r_2} \frac{r_2}{r_3} \frac{r_3}{r_1} = 1$

Av Ceva's setning følger det at A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 har et felles punkt.

b



Tre sirkler C_A, C_B, C_C med sentrum i A, B, C tangerer hverandre utvendig

La r_A være radius i C_A

r_B — , — C_B

r_C — , — C_C.

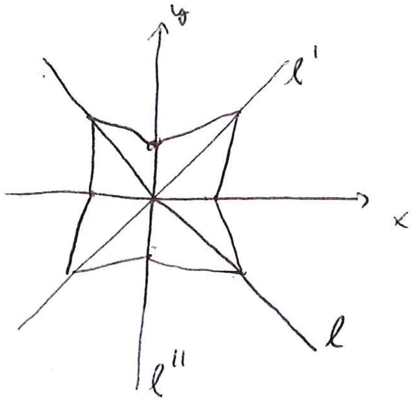
Da er

$$\left.\begin{array}{l} r_A + r_B = c \\ r_B + r_C = a \end{array}\right\} \Rightarrow r_A - r_C = c - a \left.\begin{array}{l} \\ \\ r_C + r_A = b \end{array}\right\} r_A = \tfrac{1}{2}(b+c-a)$$

Tilsvarende $r_B = \frac{1}{2}(a+c-b)$ $r_C = \frac{1}{2}(a+b-c)$

Siden trekantulikheten gjelder for sidene i en trekant er uttrykkene for r_A, r_B, r_C alle positive, så der er alltid løsninger!

2.



2a

$S_{\ell''} \circ S_\ell$ er orienteringsbevarende og har fikspunkt i $(0,0)$, så den er en rotasjon.
Siden $S_{\ell''} \circ S_\ell(1,0) = S_{\ell''}(0,-1) = (0,-1)$ er rotasjonsvinkelen $\frac{3\pi}{2}$.

2b

Siden $\ell'' \cap \ell = \ell' \cap \ell = \ell' \cap \ell'' = (0,0)$ er alle rotasjoner i G, rotasjoner om $(0,0)$. Rotasjonene i G er generert av $S_{\ell''} \circ S_\ell$, $S_{\ell''} \circ S_{\ell'}$, $S_\ell \circ S_{\ell'}$ som har rotasjonsvinkel

$\frac{3\pi}{2}$ $(S_{\ell''} \circ S_\ell)$

$\frac{\pi}{2}$ $(S_{\ell''} \circ S_{\ell'}$, siden $S_{\ell''} \circ S_{\ell'}(1,0) = (0,1)$ $)$

π $(S_\ell \circ S_{\ell'}$, siden $S_\ell \circ S_{\ell'}(1,0) = (-1,0))$

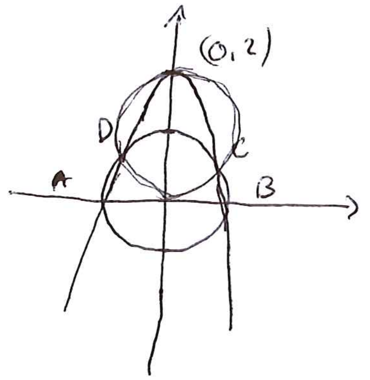
Så rotasjonene i G er rotasjoner om $(0,0)$ med vinkel $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

2c

Mangekanten med hjørner i
$(1,0), (2,2), (0,1), (-2,2), (-1,0), (-2,-2), (0,-1), (2,-2)$
(se figur over) er symmetrisk for alle isometrier i G.

3

3a



En parabel med toppunkt i $(0,2)$ som går gjennom A og B har y-aksen som symmetriakse og har likning

$$y-2 = k\cdot x^2 \quad \text{slik at} \quad y_A - 2 = k x_A^2$$

der $x_A^2 + y_A^2 = R^2$ og $y_A = 0$ $\left(\Rightarrow x_A = -R, \ (x_B = R)\right)$

så $-2 = k\cdot R^2$, $k = -\frac{2}{R^2}$ og parabelen har likning

$$\underline{y-2 = -\frac{2}{R^2}x^2}.$$

3b

$$\left.\begin{array}{l} x_c^2 + y_c^2 = R^2 \Rightarrow x_c^2 = R^2 - y_c^2 \\ y_c - 2 = -\frac{2}{R^2}x_c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow y_c - 2 = -\frac{2}{R^2}(R^2 - y_c^2)$$

$$\Rightarrow y_c - 2 = -2 + \frac{2}{R^2}y_c^2 \Rightarrow \frac{2}{R^2}y_c^2 - y_c = 0 \Rightarrow y_c = 0$$
eller $\underline{y_c = \frac{R^2}{2}}$

Siden $C \neq B$ så er $y_c = \frac{R^2}{2}$, og symmetrisk $y_D = \frac{R^2}{2}$.

$$x_D^2 = x_c^2 = R^2 - y_c^2 = R^2 - \frac{R^4}{4} = R^2\left(1 - \frac{R^2}{4}\right)$$

så $x_c = +R\sqrt{1-\frac{R^2}{4}}$, $x_D = -R\sqrt{1-\frac{R^2}{4}}$.

$$\underline{(x_c, y_c) = \left(R\sqrt{1-\frac{R^2}{4}}, \frac{R^2}{2}\right)} \qquad \underline{(x_D, y_D) = \left(-R\left(\sqrt{1-\frac{R^2}{4}}\right), \frac{R^2}{2}\right)}$$

3c

$$y_c = \frac{R^2}{2} \Rightarrow R^2 = 2y_c$$

$$x_c^2 = R^2 - \frac{R^4}{4} = (2y_c) - \frac{(2y_c)^2}{4} = 2y_c - y_c^2 \Rightarrow x_c^2 + y_c^2 - 2y_c = 0$$

Så C ligger på sirkelen med likning $x^2 + y^2 - 2y = 0$

d.v.s. $x^2 + (y-1)^2 = 1$

Siden $x_c > 0$ ligger C på halvsirkelen $x^2 + (y-1)^2 = 1$ $x \geq 0$.

D ligger på halvsirkelen $x^2 + (y-1)^2 = 1$ $x \leq 0$.

Figur se over.

3d

Parabelen $y-2 = -\frac{2}{R^2}x^2$ har tangent

i $C = \left(R\sqrt{1-\frac{R^2}{4}}, \frac{R^2}{2}\right)$ med stigningstall k

der $k = \frac{dy}{dx}(c)$:

Implisitt derivasjon $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{R^2}\cdot 2\cdot x$

$$k = \frac{dy}{dx}(c) = -\frac{4}{R^2}x_c = -\frac{4}{R}\sqrt{1-\frac{R^2}{4}}$$

Tangent likning:

$$y - y_c = k(x - x_c)$$

$$y - \frac{R^2}{2} = -\frac{4}{R}\sqrt{1-\frac{R^2}{4}}\left(x - R\sqrt{1-\frac{R^2}{4}}\right)$$

Tangenten skjærer y-aksen der $x = 0$:

$$y - \frac{R^2}{2} = \frac{4}{R}\cdot R\cdot\left(1-\frac{R^2}{4}\right) = 4 - R^2$$

$$y = 4 - R^2 + \frac{R^2}{2} = 4 - \frac{R^2}{2}$$

når $0 < R < 2$ så er $\underline{2 \le y = 4 - \frac{R^2}{2} \le 4}$.

4a

l_a gjennom $(1:0:1)$ og $(0:a:1)$ har

likning $\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = \underline{-ax_0 - x_1 + ax_2 = 0}$

b) $l_a \cap C$ der $C: x_2^2 - x_0x_1 = 0$ er gitt ved punktene

$(x_0 : x_1 : x_2)$ s.a. $x_2^2 - x_0x_1 = -ax_0 - x_1 + ax_2 = 0 \Rightarrow x_1 = a(x_2 - x_0)$

$\Rightarrow x_2^2 - ax_0(x_2 - x_0) = 0$

l_a tangerer C når $x_2^2 - ax_0(x_2 - x_0) = 0$ har en løsning.

$x_2 = \frac{a \pm\sqrt{a^2-4a}}{2}x_0 \Leftarrow x_2^2 - ax_0x_2 + ax_0^2 = 0$,

det vil si når diskriminanten $a^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ eller $\underline{a = 4}$

$l_0 : x_1 = 0$ tangerer C i $(1:0:0)$

$l_4 : x_1 = 4(x_2 - x_0)$ tangerer C i $(1:4:2)$.

$\square$