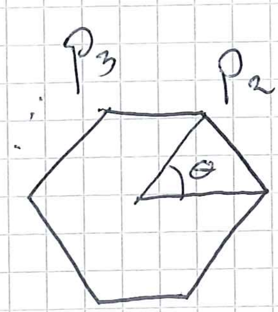
14.



For en regulær n-kant er vinkelen mellom to punkter på samme kant lik $\theta = \frac{2\pi}{n}$. Alle punkter har samme lengde fra origo.
Vi kan dermed skrive $p_2 = \rho_\theta p_1$,

$p_3 = \rho_\theta^2 p_1, \ldots$. Generelt: $p_k = \rho_\theta^{k-1} p_1$.

Med andre ord får vi alle punktene ved å rotere p_1 med multipler av θ.

Massepunktet er definert ved

$$m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_k$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \rho_\theta^{k-1} p_1$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{n}\left(p_1 + \rho_\theta p_1 + \rho_\theta^2 p_1 + \ldots + \rho_\theta^{n-1} p_1 \right)$$

Rotasjons isometriene er lineære, så vi kan skrive

$$p_1 + \rho_\theta p_1 + \rho_\theta^2 p_1 + \dots + \rho_\theta^{n-1} p_1$$

$$= (I + \rho_\theta + \rho_\theta^2 + \dots + \rho_\theta^{n-1}) p_1,$$

der I er identitetsmatrisen.

Merk at $(I-\rho_\theta)(I+\rho_\theta+\dots+\rho_\theta^{n-1})$

$$= (I+\rho_\theta+\dots+\rho_\theta^{n-1}) - (\rho_\theta+\rho_\theta^2+\dots+\rho_\theta^{n})$$

$$= I - \rho_\theta^{n} = I - \rho_{n\theta} = I - \rho_{2\pi}$$

$$= I - I = 0.$$

Men $I-\rho_\theta$ er en inverterbar matrise fordi hvis $(I-\rho_\theta)\vec{x} = 0 \Rightarrow I\vec{x} = \rho_\theta\vec{x}$ $\Rightarrow \vec{x} = \rho_\theta\vec{x}$ som er umulig med mindre $\vec{x} = 0$.

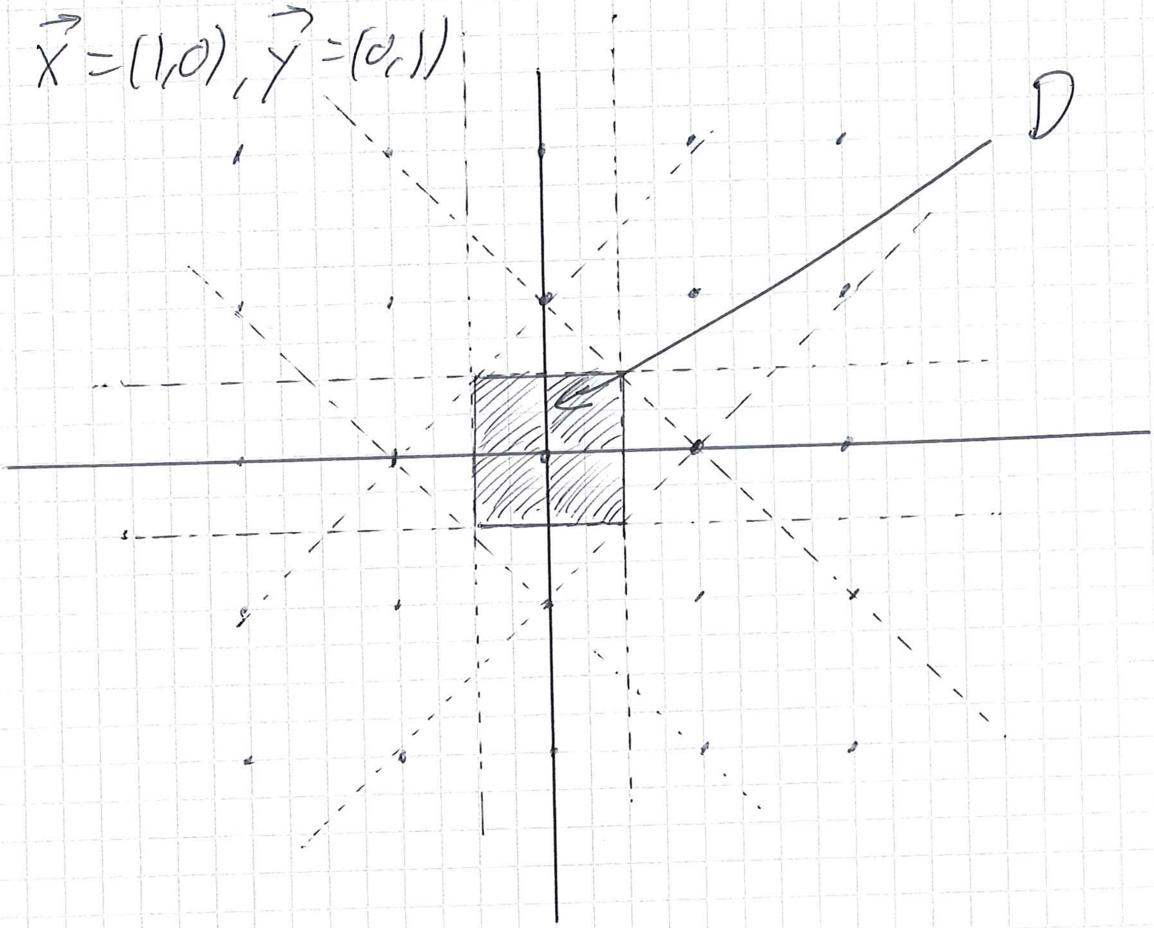
Det betyr at matrisen $I+\rho_\theta+\dots+\rho_\theta^{n-1} = 0$.

Altså er $m = \frac{1}{n}(I+\rho_\theta+\dots+\rho_\theta^{n-1})p_1 = \vec{0}$.

Massepunktet er dermed origo.

15. $M = \{m\vec{x} + n\vec{y} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$.

a) $\vec{x} = (1,0)$, $\vec{y} = (0,1)$



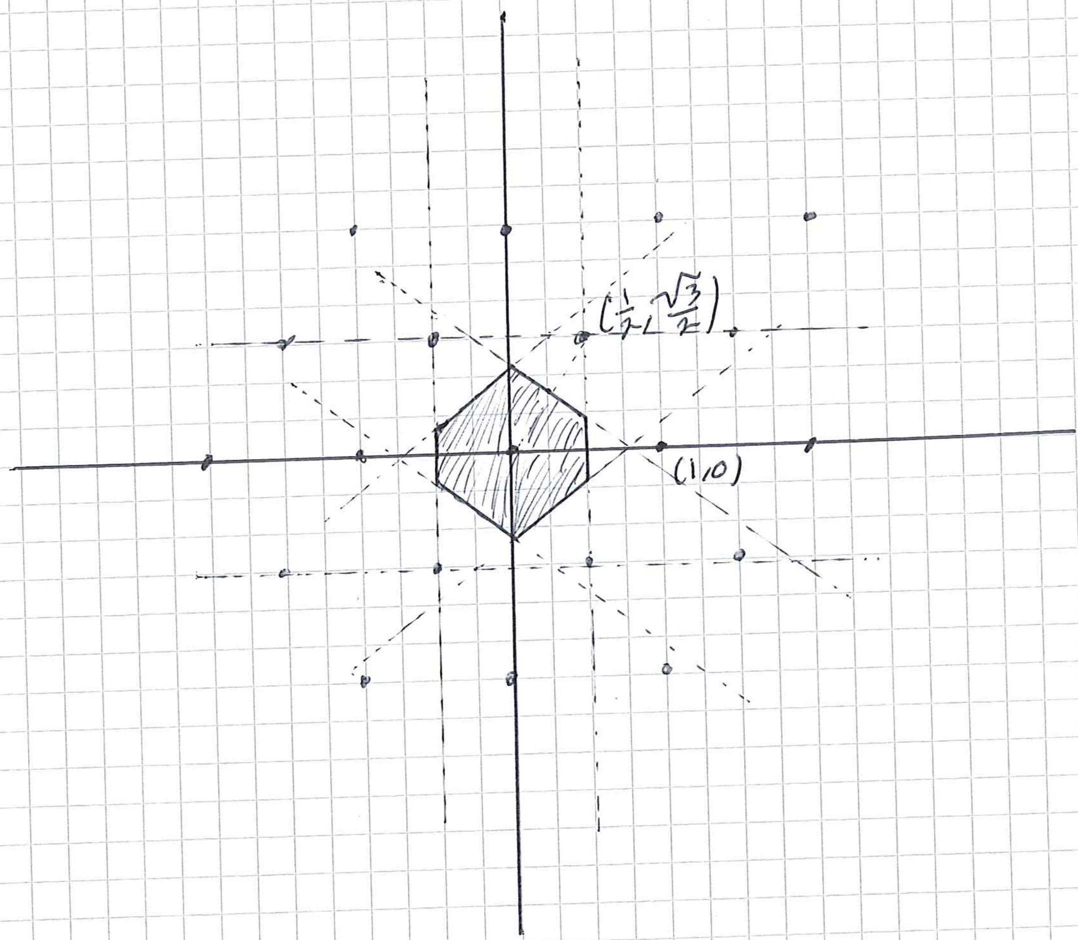
Vi kan finne grenseområdet til D ved å trekke linjene som går midt mellom origo og hvert av de andre gitterpunktene. Over har vi tegnet inn linjene mellom origo og de 8 nærmeste punktene.

Dirichlet-området er ~~d~~ området som ligger på ~~den siden av~~ ~~sa~~ siden av linjene som origo ligger på.

Vi gjør det tilsvarende på b) og c).

8g) Dirichlet området her blir et kvadrat med hjørner $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Dette er en regulær firkant som har symmetrigruppe D_4, den dihedrale gruppen.

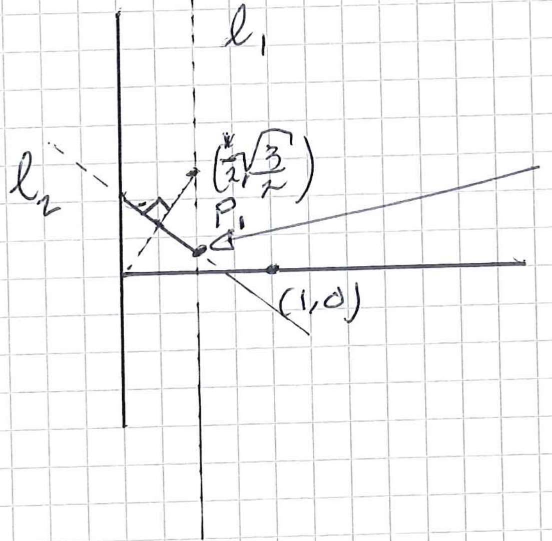
(a) $\vec{x} = (1,0)$, $\vec{y} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



Dirichlet-området blir en 6-kant.

NB! I plenumsregningen ble løsningen litt feil. Dirichlet-området blir en regulær 6-kant.

For å finne ut av om sekskanten er regulær eller ikke, finner vi hjørnene: Først ser vi på hjørnet i første kvadrant.



Vi er ute etter koordinatene til dette hjørnet. Kall det P_1.

P er skjæringspunktet mellom linjene $l_1 : x = \frac{1}{2}$, og l_2: Midtnormalen til linjestykket mellom $(0,0)$ og $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Normalvektoren til $\vec{v} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ er $\vec{n} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ (siden $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$).

Midtpunktet er $\frac{1}{2}\vec{v} = (\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$.

Linja blir da på formen

$$\ell_2 : \left\{ \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$= \left\{ \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}t,\ \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{t}{2}\right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

ℓ_1 skjærer ℓ_1 når $x = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}t = \frac{1}{2}$.

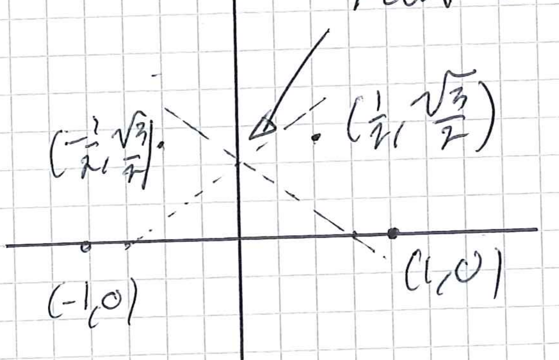
$$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}t = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\Rightarrow P_1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}},\ \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

Nå ser vi på hjørnet på den positive x_2-aksen: Kall dette P_2.



Av symmetri er P_2 skjæringspunktet mellom x_2-aksen og l_2. Dvs når

$$x = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}t = 0.$$

$$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}t = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}t = -\frac{1}{4} \Rightarrow t = -\frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\Rightarrow P_2 = \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\right)$$

$$= \left(0, \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right) = \left(0, \frac{4\sqrt{3}}{12}\right) = \underline{\underline{\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}}$$

~~Lengden på sidekanten $\overline{P_1P_2}$ er~~

$$\cancel{\|\vec{P}_1 - \vec{P}_2\| = \left\|\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{12}\right) - \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\|}$$

$$\cancel{= \left\|\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\| = \left\|\left(\frac{3}{4}, -\frac{3\sqrt{3}}{12}\right)\right\| = \left\|\left(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right\|}$$

$$\cancel{= \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{12}{16}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Lengden på sidekanten $\overline{P_1P_2}$ er $||\vec{P_1}-\vec{P_2}|| =$

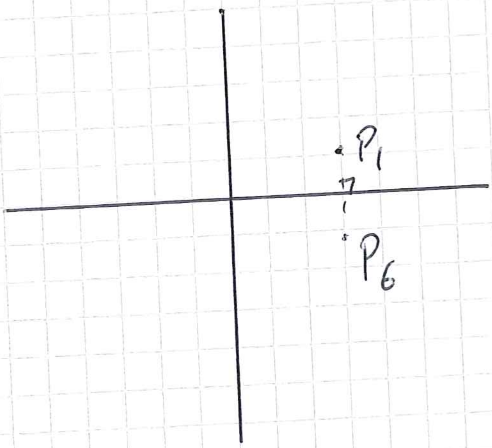
$$||(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{6}) - (0, \tfrac{\sqrt{3}}{3})|| = ||(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{6})||$$

$$= \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{36}} = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{12}}$$

$$= \sqrt{\tfrac{4}{12}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{3}}}$$

Av symmetri igjen er hjørnet i den fjerde kvadranten $P_6 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$

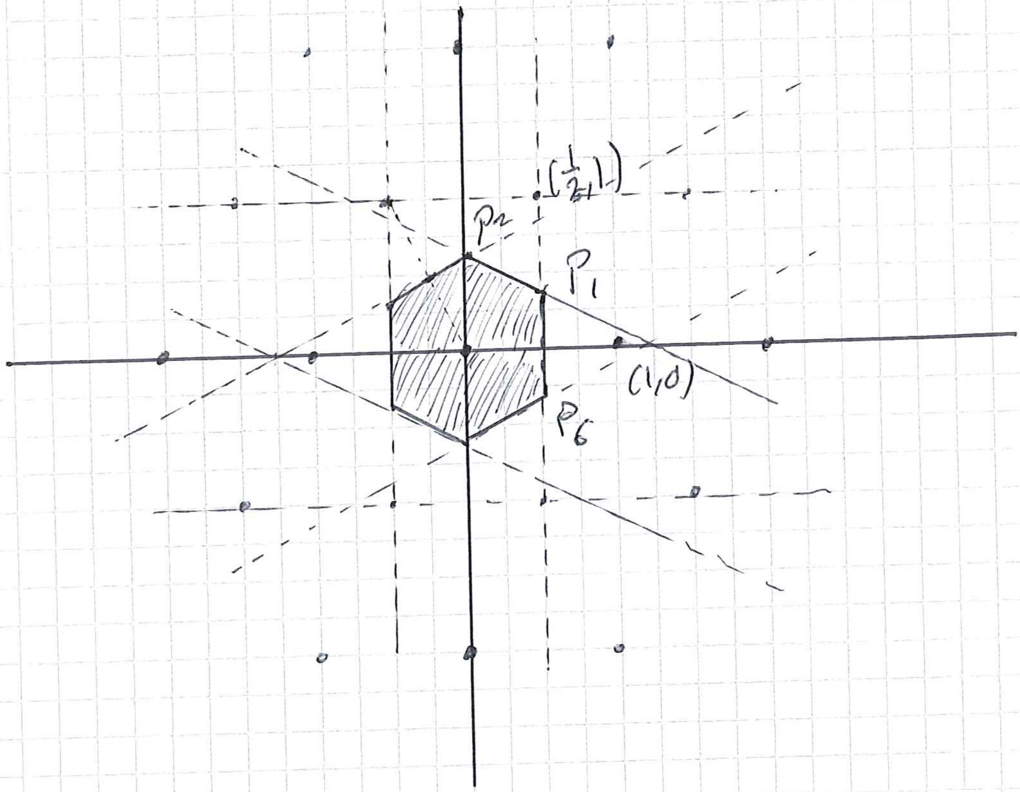


Lengden mellom P_1 og P_6 er

$$||\vec{P_1} - \vec{P_6}|| = ||(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{6}) - (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{6})|| = ||(0, \tfrac{\sqrt{3}}{3})|| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Altså er ~~to~~ sidekantene P_1P_2 og P_1P_6 like lange. Av symmetri i figuren ser vi at det blir tilsvarende for de andre sidekantene.
Dirichletområdet blir da en regulær sekskant med symmetrigruppe D_6.

c) $\vec{x} = (1,0)$, $\vec{y} = (\frac{1}{2}, 1)$



Dirichletområdet er en ikke-regulær 6-kant. Viser at symmetriene er de samme som i b). Dvs at symmetrigruppen er D_2.

På tilsvarende måte som i b) kan man regne ut sidelengdene. Man får da ~~at~~ f.eks at P_1P_2 og P_1P_6 har forskjellige lengder.

16. En diskret undergruppe av $O(2)$ er en gruppe G inneholdt i $O(2)$ s.a. det finnes en $\varepsilon > 0$ s.a. hvis $\rho_\theta \in G$, og $\theta \neq 0$, så er $|\theta| \geq \varepsilon$.

Merk ~~Anta~~ at G inneholder minst én rotasjon ρ_θ med $\theta \neq 0$ (f.eks $\theta = 2\pi$.) Definer

$\delta = \inf\{|\theta| : \rho_\theta \in G, \theta \neq 0\}$.

Siden $|\theta| \geq \varepsilon$ for alle $\theta \neq 0$ s.a. $\rho_\theta \in G$, må $\delta \geq \varepsilon > 0$. La $\{\theta_n\}_{n \geq 1}$ være en synkende følge av vinkler $\theta_n \neq 0$ s.a. $\rho_{\theta_n} \in G$ som konvergerer mot δ. Da er $\{\theta_n\}_{n \geq 1}$ er cauchy-følge, og det finnes dermed ~~en~~ et naturlig tall N slik at

$|\theta_n - \theta_m| < \delta$ for alle $n, m \geq N$.

Velg nå en slik N. Da er

$\theta_N - \theta_{N+k} = |\theta_N - \theta_{N+k}| < \delta$. for alle $k \geq 1$.

Men p_{θ_N} og $p_{\theta_{N+k}}$ er inneholdt i G.

~~$p_{\theta_{N+1}}$ og dermed~~ Da er inversen

$p_{\theta_{N+k}}^{-1} = p_{-\theta_{N+k}}$ også inneholdt i G,

og dermed er $p_{\theta_N} p_{-\theta_{N+k}} = p_{\theta_N - \theta_{N+k}} \in G$.

Men $|\theta_N - \theta_{N+k}| < \delta$, som er umulig per definisjon av δ, med mindre $\theta_N - \theta_{N+k} = 0$, dvs $\theta_N = \theta_{N+k}$.

Dette gjelder alle $k \geq 1$, så det betyr at $\theta_N = \theta_{N+1} = \theta_{N+2} = \dots$ Dvs følgen $\{\theta_n\}_{n\geq 1}$ er stasjonær og må følgelig konvergere mot θ_N. Det betyr at $|\theta_N| = \delta$. M.a.o. finnes det en minste vinkel $\theta \neq 0$ slik at $p_\theta \in G$. (Dvs. minst absoluttverdi)

Vi kan anta at denne vinkelen er positiv. (Hvis ikke, velg bare $-\theta$ istedet).

La nå φ være en vilkårlig vinkel der $\rho_\varphi \in G$. Da finnes det et heltall n slik at ~~$(n-1)\theta < \varphi < n\theta$~~

$n\theta \leq \varphi < (n+1)\theta$.

$\Rightarrow \quad 0 \leq \varphi - n\theta < \theta$

$\Rightarrow \quad 0 \leq |\varphi - n\theta| < |\theta|$. ~~Vinkelen θ har den minste absolutt verdien~~.

Av et tilsvarende argument som over er $\rho_{\varphi - n\theta} \in G$. Men θ er vinkelen ulik 0 med minst absolutt-verdi, så det betyr at $\varphi - n\theta = 0 \Rightarrow \varphi = n\theta$. Altså er alle vinklene ~~et multi~~ φ hvor $\rho_\varphi \in G$ et multippel av θ. Spesielt er $\rho_{2\pi} = id \in G$, så 2π er også et multippel av θ. Dvs at $\theta = \frac{2\pi}{n}$ for et eller annet heltall $n > 0$.

Vi har dermed kommet fram til at alle rotasjoner i G er på formen

~~ρ_{θ}~~ $\rho_{\frac{2k\pi}{n}}$ for $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

La nå $S_{\ell} \in G$ være en speiling.

Hvis $S_{\ell'} \in G$ er en speiling for en annen linje ℓ', så er $S_{\ell} S_{\ell'} \in G$ orienteringsbevarende. Altså er

$S_{\ell} S_{\ell'} = \rho_{\frac{2k\pi}{n}}$ for en eller annen $k = 0, \ldots, n-1$.

~~$\Rightarrow S_{\ell} S_{\ell'} S_{\ell'} = \rho_{\frac{2k\pi}{n}} S_{\ell'}$~~

$$\Rightarrow S_{\ell} S_{\ell} S_{\ell'} = S_{\ell} \rho_{\frac{2k\pi}{n}}$$

$$\Rightarrow S_{\ell'} = S_{\ell} \rho_{\frac{2k\pi}{n}}.$$

Dette betyr at hvis G har speilingen overhodet, så er alle på formen

$S_{\ell} \rho_{\frac{2k\pi}{n}}$ for en eller annen utvalgt speiling $S_{\ell} \in G$.

Alle isometrier i G har origo som fikspunkt, og er dermed enten speilinger eller rotasjoner. ~~#~~ Det betyr at vi har funnet alle mulige elementer i G.

·) $\rho_{\frac{2k\pi}{n}}$, $k=0,\dots,n-1$

·) Hvis G har en speiling $s_e \in G$,

$s_e \rho_{\frac{2k\pi}{n}}$, $k=0,\dots,n-1$.

Dette er endelig mange uansett.

17. Et fundamentalområde D til en gruppe $\underset{\text{av } E^2}{G} \leq Isom_2$ er en lukket delmengde slik at randa er en stykkevis glatt kurve og

i) $E^2 = \bigcup_{g \in G} g(D)$

ii) Det indre $int(g(D) \cap h(D)) = \emptyset$ når $g \neq h$.

Vi har en diskret undergruppe $G \leq Isom_2$ ~~med~~ hvor rangen til L_G er 2.

Her er $L_G \leq G$ undergruppen av translasjoner, og $M_G = \{m\vec{a} + n\vec{b} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ for to ~~lineært uavhengige~~ lineært uavhengige vektorer $\vec{a}, \vec{b}$.

Dirichletområdet D_G er gitt ved

$$D_G = \{p \in E^2 \mid d(p, \vec{0}) \leq d(p, q) \; \forall q \in M_G, q \neq \vec{0}\}$$

Vi skal vise at D_G er et fundamentalområde til ~~[illegible]~~ L_G.

La nå $g \in L_G$. Da er

$$g(D_G) = \{ g(p) \mid d(p, \vec{o}) \leq d(p, q) \ \forall q \in M_G \setminus o \}.$$

Skriver vi $p' = g(p)$, er $p = g^{-1}(p')$, så:

$$g(D_G) = \{ p' \mid d(g^{-1}(p'), \vec{o}) \leq d(g^{-1}(p'), q) \ \forall q \in M_G \setminus o \}$$

g er en isometri, så

$$d(g^{-1}(p'), \vec{o}) = d(p', g(\vec{o})) \quad \text{og}$$

$$d(g^{-1}(p'), q) = d(p', g(q)).$$

Skriv $q' = g(q)$. Da er ~~$q \in M_G \setminus o$~~

$$q \in M_G \setminus o \iff q' \in M_G \setminus g(\vec{o}).$$

$$\Rightarrow g(D_G) = \{ p' \in E^2 \mid d(p', g(\vec{o})) \leq d(p', q') \ \forall q' \in M_G \setminus g(\vec{o}) \}$$

Dvs at $g(D_G)$ består av punktene nærmest gitterpunktet $g(\vec{o})$.

Men alle punkter er nærmest et eller annet gitterpunkt (siden gitterpunktene er jevnt fordelt i planet). Det betyr at ethvert punkt $p \in E^2$ ligger i $g(D_G)$ for ~~en eller~~ den $g \in L_G$ slik at p er nærmest $g(\vec{o})$.

M.a.o. er $E^2 = \bigcup_{g \in G} g(D_G)$.

Viser nå på mengdene $g(D_G)$ og $h(D_G)$ for $g \neq h$. Anta at $p \in g(D_G) \cap h(D_G)$.

Da har vi at

$$d(p, g(\vec{o})) \leq d(p, q) \quad \forall q \in M_G \setminus g(\vec{o}) \text{ og}$$
$$d(p, h(\vec{o})) \leq d(p, q) \quad \forall q \in M_G \setminus h(\vec{o}).$$

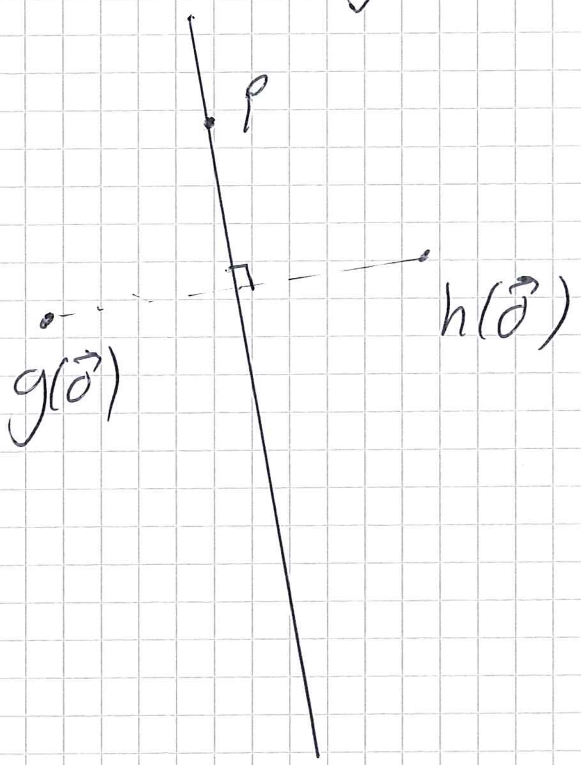
~~Altså er p nærmest både $g(\vec{o})$ og $h(\vec{o})$~~

Spesielt har vi at

$$d(p, g(\vec{o})) \leq d(p, h(\vec{o})) \text{ og}$$
$$d(p, h(\vec{o})) \leq d(p, g(\vec{o}))$$

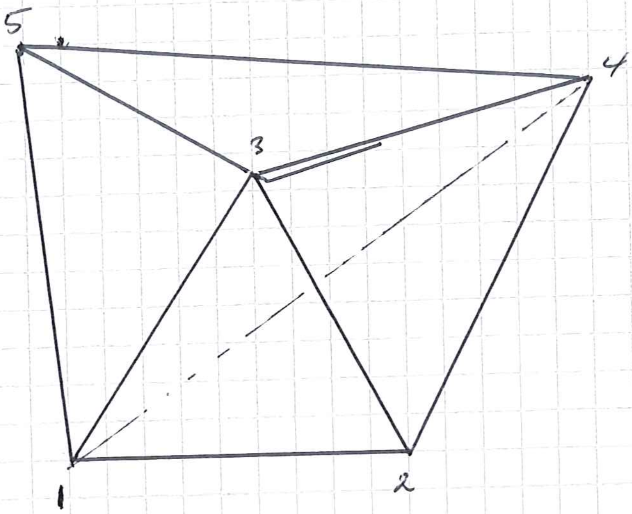
$\Rightarrow d(p, g(\vec{o})) = d(p, h(\vec{o}))$.

Det betyr at p må ligge på linja midt mellom $g(\vec{o})$ og $h(\vec{o})$



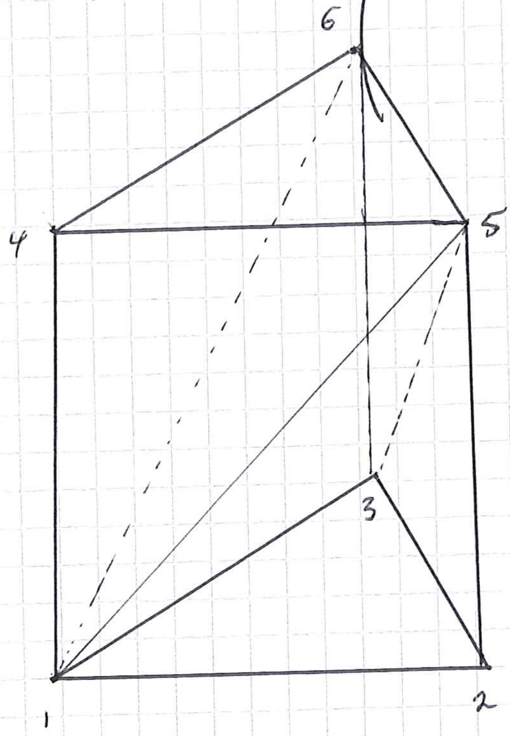
En linje inneholder ingen epsilon-kuler, så det indre av $g(D_6) \cap h(D_6)$ må være tom.

3.6.9 $V = 5$, $f = 6$. : $\left(e = V + f - 2 = 9 \right)$

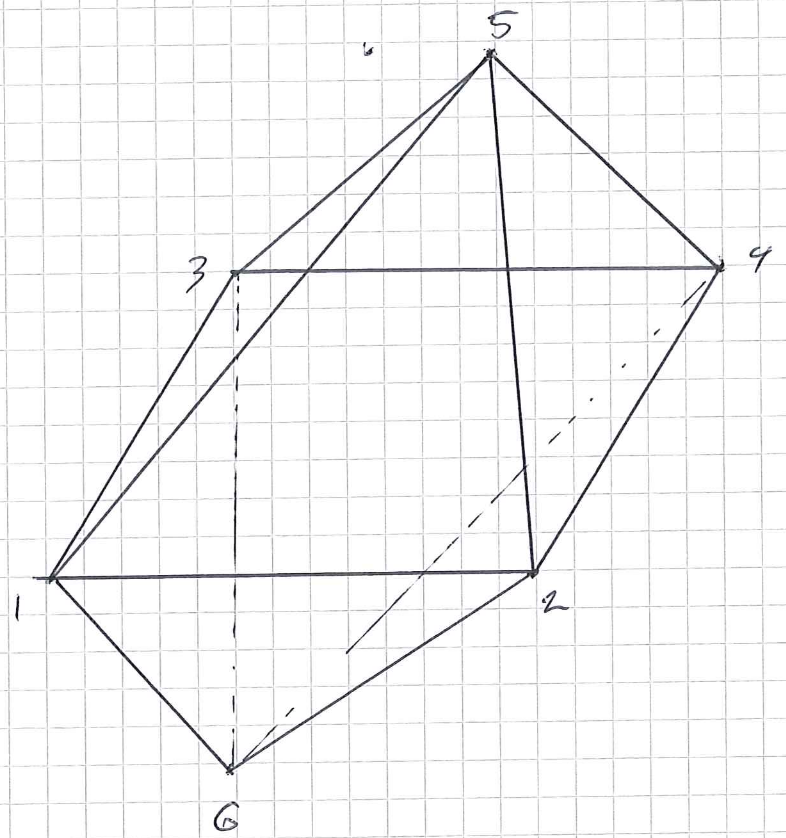


Sammensetning av to tetraedre langs en sideflate

$V = 6$, $f = 8$ $\left(e = V + f - 2 = 12 \right)$

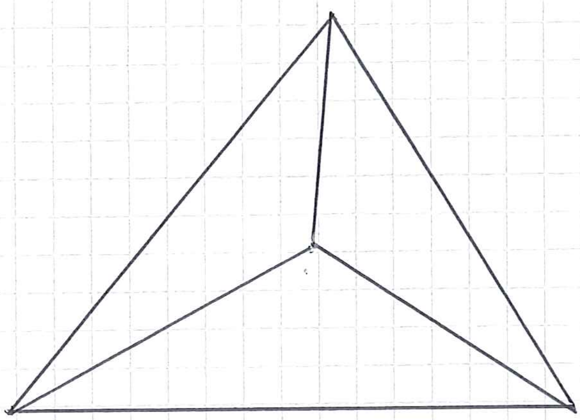


to trekanter over hverandre forbundet med ~~tr~~ kanter langs tilhørende hjørner, og en oppdeling av de rektangulære vertikal sideflatene til trekanter.



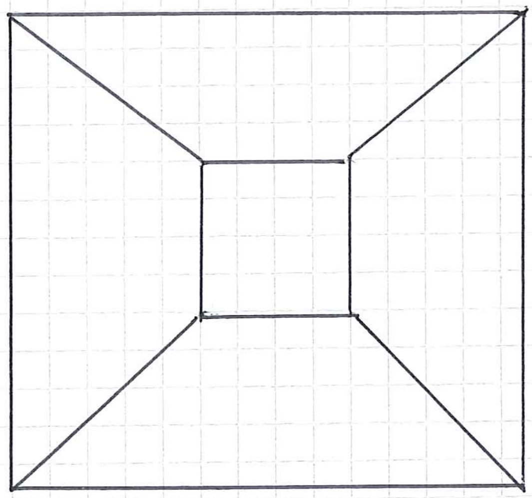
To pyramider limt sammen langs grønn flatene. ~~Oktahedron~~ oktaeder.

2. Tetraedr:

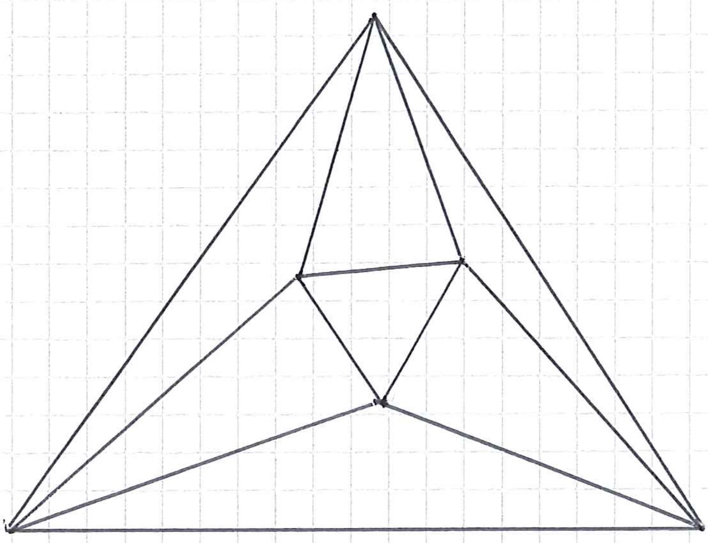


Schlegel diagram

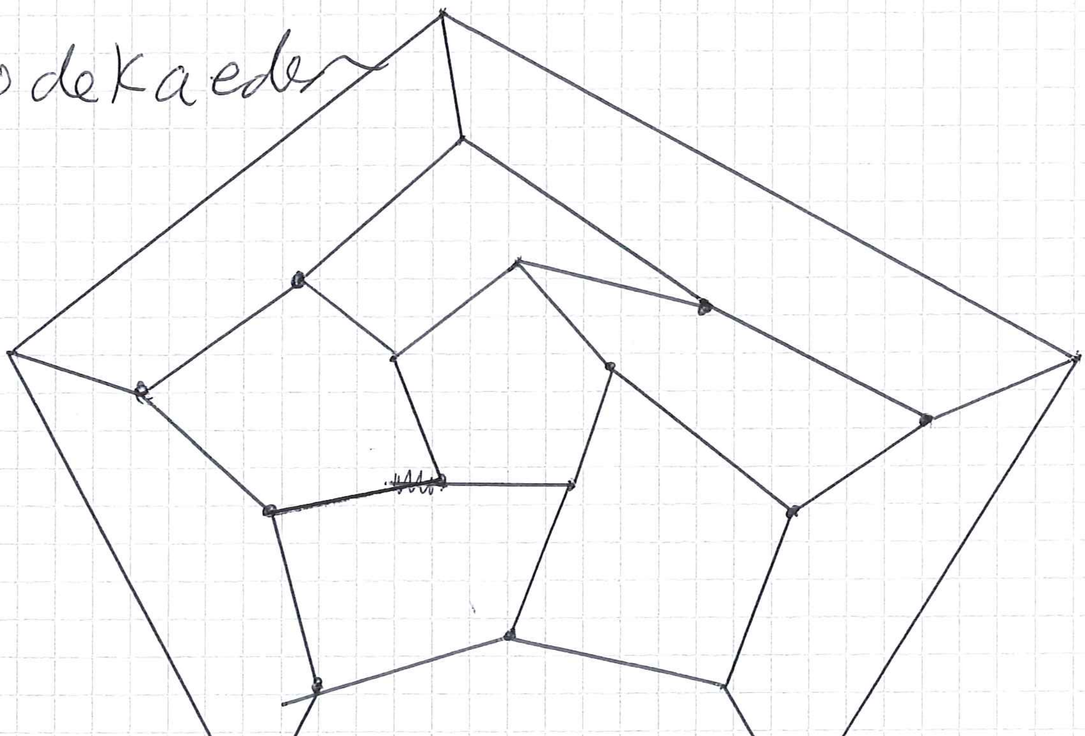
Kube:



Oktaeder



Dodekaeder



Ikosaeder