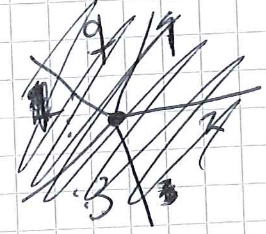
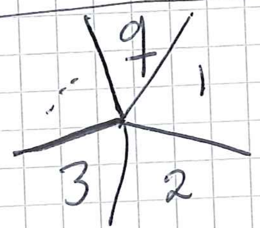
3.6.

3. $\{p,q\}$ er schläfli-symbolet til et regulært polyeder P. Det betyr at P består av regulære p-kanter der q av dem møtes i hvert hjørne.



~~q p-kanter~~

Vi har v hjørner, e kanter og f flater i P.



q p-kanter møtes i et hjørne.

Hvert hjørne er altså en del av q forskjellige kanter.

Vi teller nå mengden ~~$\{(k,h)\}$~~

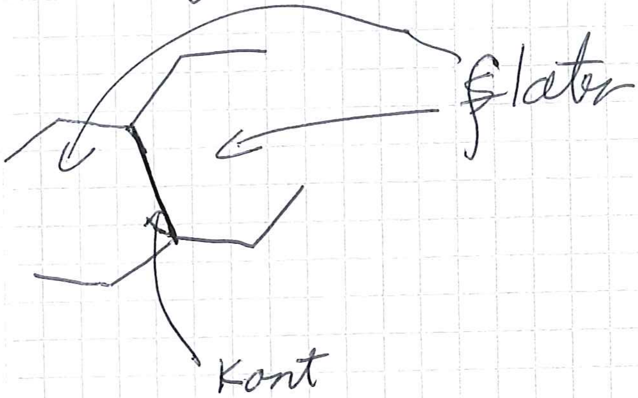
$$S=\{(k,h) \mid k \text{ kant i } P,\ h \text{ hjørne i } k\}$$

på to måter. For hver kant k har vi to hjørner $\Rightarrow |S| = 2e$.

For hvert hjørne h har vi q kanter

$\Rightarrow |S| = qv$.

Det gir oss formelen $qv = 2e$.



Hver kant er inneholdt i to forskjellige flater.

Nå teller vi mengden

$T = \{(r, k) \mid r \text{ flate i } P,\ k \text{ kant i } r\}$

på to måter. For hver flate r har vi p kanter. $\Rightarrow |T| = rp$.

For hver kant k har vi to flater

$\Rightarrow |T| = 2e$.

Det gir formelen $2e = fp$.

1) $2e = qv$

2) $2e = fp$.

Nå løser vi for v og f:

1) $v = \dfrac{2e}{q}$, 2) $f = \dfrac{2e}{p}$.

Husk formelen $f - e + v = 2$.

Vi setter inn for v og f:

$$\frac{2e}{q} - e + \frac{2e}{p} = 2$$

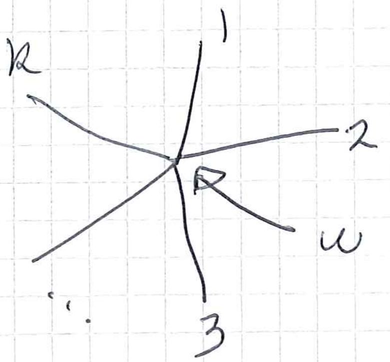
$$\Rightarrow e\left(\frac{2}{q} - 1 + \frac{2}{p}\right) = 2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{q} - 1 + \frac{2}{p} = \frac{2}{e}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p} = \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

4. V_k er antall hjørner w med $\deg w = k$. $V = \#$ hjørner $f = \#$ flater
$e = \#$ kanter



Et hjørne w med $\deg w = k$. Det er V_k slike hjørner.

Vi teller $S = \{(s, w) \mid$ s kant i P, w hjørne i s $\}$.

Vi danner en partisjon av S:

La $S_k \subseteq S$ være undermengden

$S_k = \{(s, w) \mid$ s kant i P, w hjørne i s og $\deg w = k\}$.

Da er $\bigcup_k S_k = S$ fordi for alle ~~p~~ par $(s, w) \in S$ ~~er~~ det slik at ~~a~~ $\deg w = k$ for en eller annen k.

Videre er $S_i \cap S_j = \emptyset$, når $i \neq j$ fordi et hjørne kan ikke ha grad i og j når $i \neq j$.

Undermengdene S_k for $k=1,2,\dots$ danner altså en partisjon av S.

$$\Rightarrow |S| = \sum_k |S_k|.$$

Da får vi

~~På samme måte som i oppgv 3~~

$|S_k| = k v_k$. (hvert hjørne w med deg $w = k$ er inneholdt i k kanter, og det er v_k slike hjørner).

~~Som i oppgv 3 har vi også~~

~~$|S| = 2e$.~~

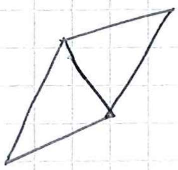
$$\Rightarrow |S| = \sum_k k v_k.$$

Som i oppgv 3 har vi også $|S| = 2e$.

Det gir: $2e = \sum_k k v_k$.

$$\Rightarrow e = \frac{1}{2} \sum_k k v_k$$

Flatene i P er trekanter, som har 3 kanter.



Hver kant er inneholdt i to flater.

Nå teller vi

$$T = \{(r,s) \mid r \text{ flate i } P,\ s \text{ kant i } r\}.$$

Da er $|T| = 3f$, siden hver flate har tre kanter.

Vi har også $|T| = 2e$, siden hver kant s ligger i 2 flater.

$$\Rightarrow 2e = 3f \Rightarrow f = \frac{2}{3}e.$$

Men $e = \frac{1}{2}\sum_k k v_k \Rightarrow f = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\sum_k k v_k$

$$= \frac{1}{3}\sum_k k v_k.$$

Til slutt har vi $v = \sum_k v_k$, siden alle hjørner må ha én eller annen grad.

Oppsumert:

- $f = \frac{1}{3} \sum_k k V_k$
- $e = \frac{1}{2} \sum_k k V_k$
- $V = \sum_k V_k$.

Nå setter vi inn i formelen

$$f - e + V = 2.$$

$$\frac{1}{3} \sum_k k V_k - \frac{1}{2} \sum_k k V_k + \sum_k V_k = 2.$$

$$\Rightarrow \sum_k \frac{k}{3} V_k - \sum_k \frac{k}{2} V_k + \sum_k V_k = 2$$

$$\Rightarrow \sum_k \left(\frac{k}{3} V_k - \frac{k}{2} V_k + V_k \right) = 2$$

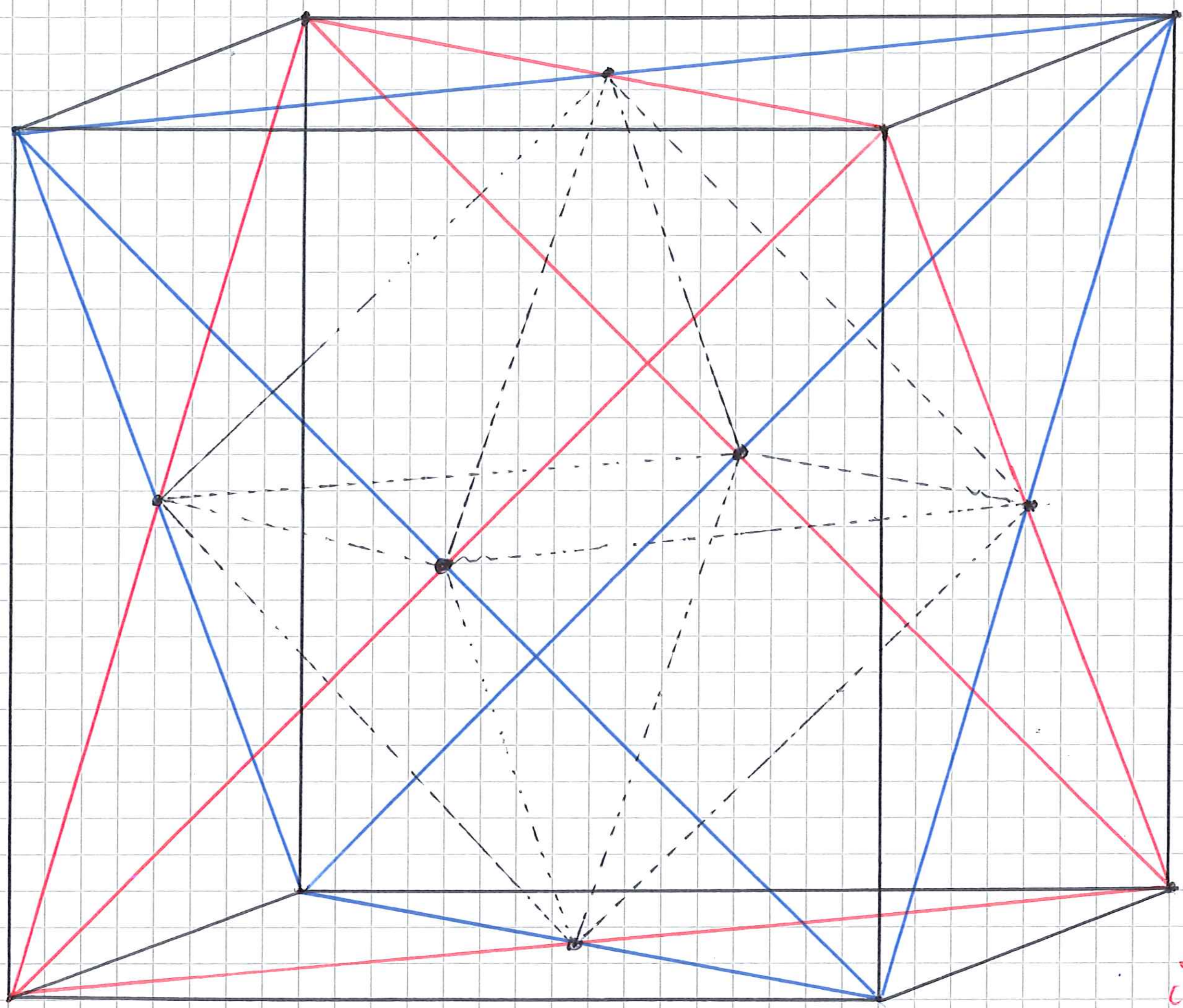
$$\Rightarrow \sum_k \left(\frac{k}{3} - \frac{k}{2} + 1 \right) V_k = 2$$

$$\Rightarrow \sum_k \left(1 - \frac{k}{6} \right) V_k = 2. \quad \blacksquare$$

5. eksamensoppgave.

De 8 hjørnene i en regulær kube er

$(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.



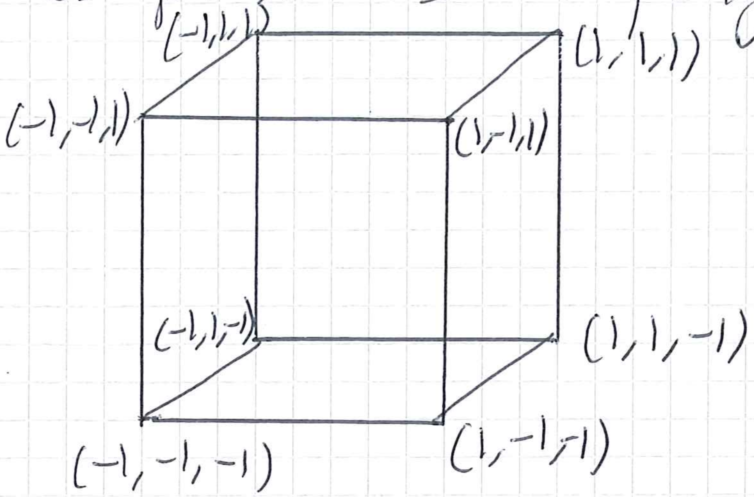
i rødt

Et regulært tetraeder kan innhylles som over.
Kantene er diagonaler i sideflater, og
dermed like lange.

I blått har vi innhyllet et annet tetraeder,
med hjørner i de 4 andre hjørnene til kuben.

I stiplede sorte linjer har vi tegnet
snittet av de to tetraedrene.
Dette danner et oktaeder.

Koordinatene til hjørnene til kuben er plassert som følger:



Da er hjørnene i det røde tetraedret

(-1,-1,-1), (1,1,-1), (1,-1,1) og (-1,1,1).

Snittpunktene mellom det blå og røde tetraedrene ligger på midten av de 6 forskjellige sideflatene. De har koordinater

(1,0,0), (-1,0,0), (0,1,0), (0,-1,0), (0,0,1) og (0,0,-1).

Dette er hjørnene til oktaedret.

Merk at det er et regulært polyeder, siden alle kantene er like lange.