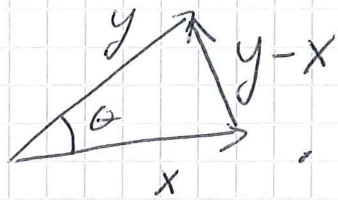
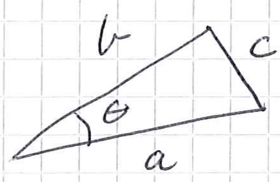
1 Skal vise at $\theta = \cancel{ar}\cos^{-1}\left(\frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|}\right)$ er vinkelen mellom x og y.



Den tredjesiden i trekanten har vektor $y - x$.

Cosinussetningen:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Her er $a = \|x\|$, $b = \|y\|$, $c = \|y - x\|$.

$$\Rightarrow a^2 = x \cdot x, \quad b^2 = y \cdot y, \quad c^2 = (y-x)\cdot(y-x).$$

$$\Rightarrow c^2 = (y-x)\cdot(y-x) = y \cdot y - y \cdot x - x \cdot y + x \cdot x$$
$$= b^2 - 2x \cdot y + a^2.$$

Bruker cosinussetningen:

$$\cos\theta = \frac{a^2 + b^2 - (b^2 - 2x \cdot y + a^2)}{2ab}$$

$$= \frac{2x \cdot y}{2\|x\|\|y\|} = \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|}.$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|}\right) \quad \square$$

2) Skal vise at $d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$.

Per definisjon, er $d(x,y)=\|x-y\|$.

~~$(x-y)\cdot(x-y)$~~

Anta at $\|z\|=0$ for en eller annen vektor z. Da er

$\|z\|=\sqrt{z_1^2+z_2^2}=0 \Rightarrow z_1^2+z_2^2=0$. Men $z_1^2 \geq 0$ og $z_2^2 \geq 0$, så den eneste måten $z_1^2+z_2^2=0$, er at $z_1^2=0$ og $z_2^2=0$.

Dvs $z=(z_1,z_2)=(0,0)=\vec{0}$

Hvis $d(x,y)=\|x-y\|=0$, så er av det vi viste over $x-y=\vec{0} \Rightarrow x=y$. $\square$

Vi skal vise at dersom $m: E^n \to E^n$ er en ~~bijektiv~~ funksjon som bevarer avstand, så er m injektiv.

La $x,y \in E^n$ være to vektorer, og anta at $m(x)=m(y)$. Da er

$$d(x,y) = d(m(x),m(y)) \leftarrow \left(\text{siden } m \text{ bevarer avstand}\right)$$

$$= 0 \leftarrow \left(\text{siden } m(x)=m(y)\right)$$

Av det vi viste over, må $x = y$.

Altså er m injektiv.

3. La $Sym(F) = \{m \in Isom_n \mid m(F) = F\}$ betegne mengden av symmetriene til F.

Da er $Sym(F) \subseteq Isom_n$. Vi må vise at dette danner en undergruppe av $Isom_n$.

Altså: a) Hvis $m_1, m_2 \in Sym(F)$, så er $m_1 m_2 \in Sym(F)$

b) Hvis $m \in Sym(F)$, så er $m^{-1} \in Sym(F)$.

Et element $m \in Sym(F)$ karakteriseres ved at $m(F) = F$, ~~hvor $m(F) = \{x \in E$~~

a) La $m_1, m_2 \in Sym(F)$. Da er

$$(m_1 m_2)(F) = m_1(m_2(F)) = m_1(F) = F.$$

$\Rightarrow m_1 m_2 \in Sym(F)$

b) ~~Husk at $m(F) = \{m(x) \mid x \in F\}$.~~

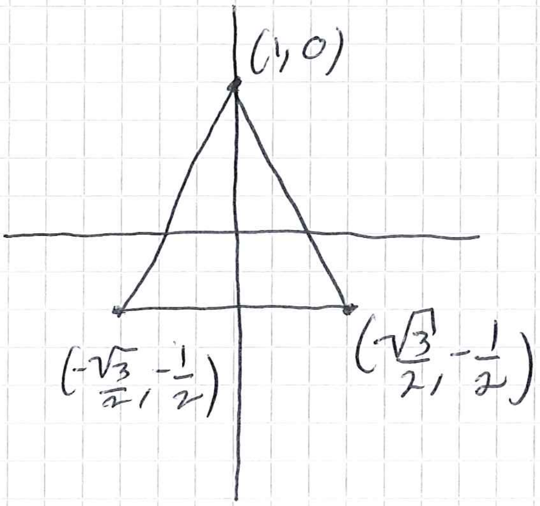
La $m \in Sym(F)$. Da er

~~$m(F) = \{m(x) \mid x \in F\}$~~

$$m^{-1}(F) = m^{-1}(m(F)) = (m^{-1}m)(F) = (id_{E^n})(F) = F$$

hvor $id_{E^n}: E^n \to E^n$ er identiteten. Altså er $m^{-1} \in Sym(F)$.

4. Trekanten har hjørner $(0,1)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ og $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.



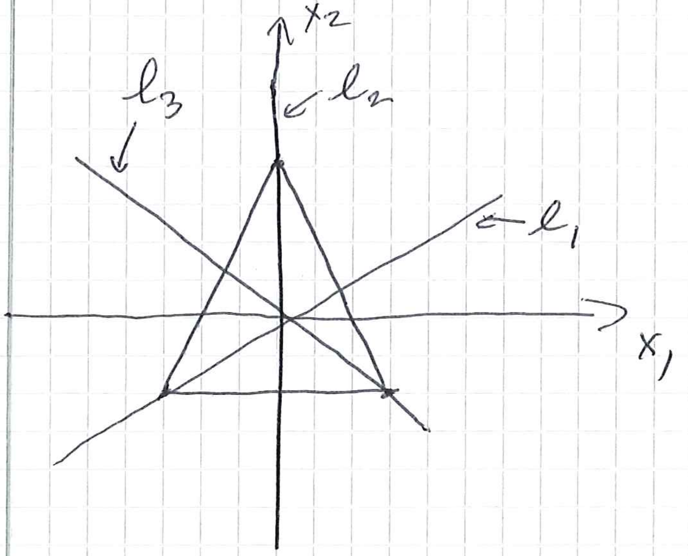
Rotasjonssymmetriene er på formen

~~id~~, $\rho_{\frac{2k\pi}{3}}$, $k = 0, 1, 2$. Dvs:

id, $\rho_{\frac{2\pi}{3}}$, $\rho_{\frac{4\pi}{3}}$, med matrisen

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_{\frac{2\pi}{3}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rho_{\frac{4\pi}{3}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{4\pi}{3} & -\sin\frac{4\pi}{3} \\ \sin\frac{4\pi}{3} & \cos\frac{4\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$



3 speilingslinjer, l_1, l_2 og l_3.

Speilingslinjene ser vi over.
Her er S_{l_2} speiling om x_2-aksen. Det betyr at $S_{l_2}(e_1) = -e_1$ og $S_{l_2}(e_2) = e_2$, der $e_1 = (1,0)$ og $e_2 = (0,1)$ er enhetsvektorene.
Dermed er matrisen ~~e~~ som følger:

$$S_{l_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Merk at ved å rotere linjen l_1 med vinkel $\frac{2\pi}{3}$, får vi x_1-aksen.
La S betegne speiling om x_1-aksen, med matrise $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Å speile om l_1 er det samme som å ~~speile~~ rotere med vinkel $\frac{2\pi}{3}$, speile om x_1-aksen, og så rotere tilbake. Dvs:

$$S_{l_1} = P_{-\frac{2\pi}{3}} \, S \, P_{\frac{2\pi}{3}}.$$

Da vil matrisen til S_{ℓ_1} være

$$S_{\ell_1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$ (Merk at $P_{-\frac{2\pi}{3}} = P_{\frac{4\pi}{3}}$).

Videre, å speile om ℓ_3 er det samme som å rotere med vinkel $\frac{2\pi}{3}$, speile om ℓ_2, og så rotere tilbake. Dvs:

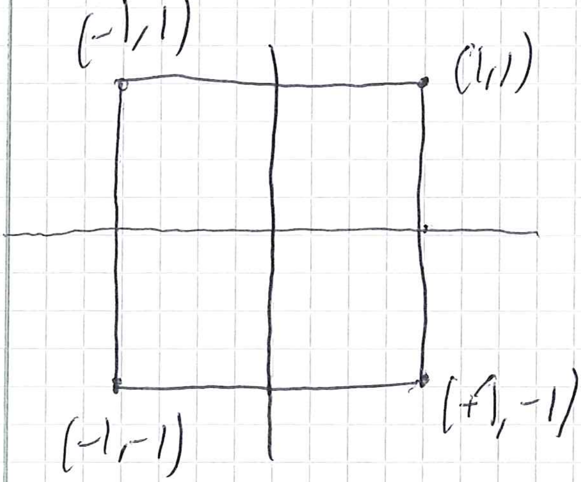
$$S_{\ell_3} = P_{-\frac{2\pi}{3}} S_{\ell_2} P_{\frac{2\pi}{3}}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\boxtimes$

Kvadratet har hjørner $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$:



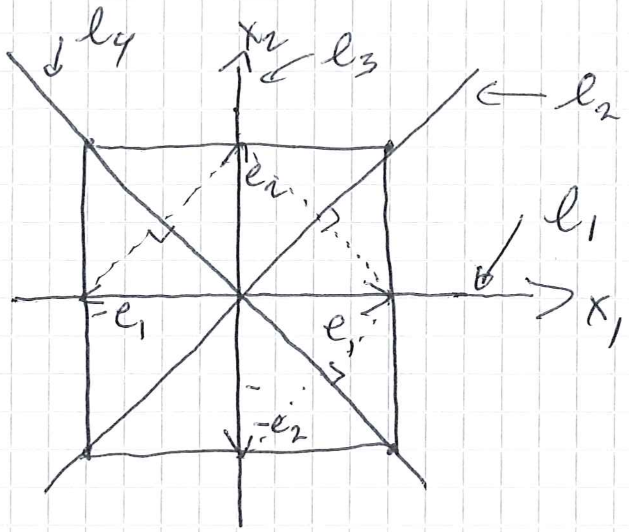
Rotasjonssymmetriene er:

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{\frac{2\pi}{4}} = P_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

$$P_{\pi} = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$P_{\frac{3\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{3\pi}{2} & -\sin\frac{3\pi}{2} \\ \sin\frac{3\pi}{2} & \cos\frac{3\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$



& speilingslinjer, l_1, l_2, l_3, l_4.

Her er l_1 x_1-aksen, og l_3 - x_2-aksen.
Som vi så i stad, er da

$$S_{l_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad S_{l_3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

~~Merk~~ Merk at $S_{l_2}(e_1) = e_2$ og $S_{l_2}(e_2) = e_1$.
Dvs, linjen l_2 gitt ved $x_1 = x_2$ i planet sender e_1 til e_2, og e_2 til e_1. Det betyr at $S_{l_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dessuten ser vi at $S_{l_4}(e_1) = -e_2$ og $S_{l_4}(e_2) = -e_1$. Altså er

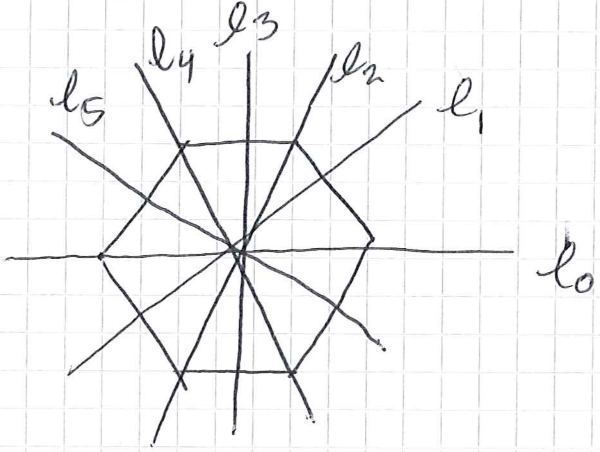
$$S_{l_4} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\blacksquare$

5. Generelt består D_n av n rotasjoner

$\rho_{\frac{2k\pi}{n}}$, $k=0,\dots,n-1$ og n speilinger

S_{l_k} $k=0,\dots,n-1$:



(Eksempel med 6-kanten.)

Viser at å rotere med vinkel $\frac{2k\pi}{n}$ er det samme som å rotere med vinkel $\frac{2\pi}{n}$ k ganger. Dvs: $\rho_{\frac{2k\pi}{n}} = \rho_{\frac{2\pi}{n}}^{k}$, altså $\rho_{\frac{2\pi}{n}}$ anvendt k-ganger. Altså genererer $\rho_{\frac{2\pi}{n}}$ alle rotasjonene.

Velg nå en vilkårlig speilingslinje S_{l_k}. Vi skal vise at alle symmetriene

$\cancel{\rho_{\frac{2k\pi}{n}}}$ $\rho_{\frac{2\pi}{n}} S_{l_k}, \rho_{\frac{2\cdot 2\pi}{n}} S_{l_k}, \dots, \rho_{\frac{2(n-1)\pi}{n}} S_{l_k}$

er forskjellige.

Så anta at r og m er to heltall mellom 0 og $n-1$, og anta at

$$\rho_{\frac{2\pi}{n}}^{r} S_{\ell_k} = \rho_{\frac{2\pi}{n}}^{m} S_{\ell_k}.$$

Da er

$$\rho_{\frac{2\pi}{n}}^{r} S_{\ell_k} S_{\ell_k} = \rho_{\frac{2\pi}{n}}^{m} S_{\ell_k} S_{\ell_k}$$

$$\Rightarrow \rho_{\frac{2\pi}{n}}^{r} = \rho_{\frac{2\pi}{n}}^{m} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{dobbel speiling} \\ S_{\ell_k} S_{\ell_k} = id\end{array}\right)$$

Men disse rotasjonene er like kun dersom $r = m$. Altså er da symmetriene $\cancel{\rho_{\frac{2\pi}{n}}^{k}}$ $\rho_{\frac{2\pi}{n}}^{r} S_{\ell_k}$ forskjellige for $r = 0, \ldots, n-1$.

Disse symmetriene er orienterings-<u>reverserende</u>, og kan dermed ikke være lik noen av de orienterings-<u>bevarende</u> rotasjonssymmetriene. Altså vil $\rho_{\frac{2\pi}{n}}^{r}$, $r = 0, \ldots, n-1$ og

$\rho_{\frac{2\pi}{n}}^{r} S_{\ell_k}$, $r = 0, \ldots, n-1$ utgjøre $2n$ forskjellige symmetrier, og dermed utfylle hele D_n. Så D_n er generert av $\rho_{\frac{2\pi}{n}}$ og S_{ℓ_k}.

6. Alle isometrier er på formen

·) $t_a \rho_\theta$ — orienteringsbevarende

·) $t_a \rho_\theta s$ — orienterings reverserende

Vi skal skrive $\rho_\theta t_a$, $s t_a$, $s\rho_\theta$ på en av formene over.

a) $\rho_\theta t_a$: La $x \in E^2$ være en vektor.

Da er $\rho_\theta t_a(x) = \rho_\theta(a+x) = \rho_\theta a + \rho_\theta x$

$\Rightarrow \rho_\theta t_a(x) = t_{\rho_\theta a} \rho_\theta x$.

$\Rightarrow \rho_\theta t_a = t_{\rho_\theta a} \rho_\theta$, siden dette gjelder alle x.

b) $s t_a$: Igjen, velg en $x \in E^2$. Da er

$s t_a(x) = s(a+x) = sa + sx = t_{sa} s x$

$\Rightarrow s t_a = t_{sa} s$

c) $s\rho_\theta$: Denne isometrien har origo O som fikspunkt, og er orienteringsreverserende. Det betyr at

$s\rho_\theta = \rho_\varphi s$ for en vinkel φ.

Den har ingen translasjon t_a til venstre siden O er fikspunkt.

Viser nå på $e_1 = (1,0)$. Da er
$Se_1 = (1,0)$.

$\Rightarrow (\rho_\varphi S)(e_1) = \rho_\varphi(1,0) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$.

På den andre siden er

$S\rho_\theta(e_1) = S(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos\theta, -\sin\theta)$.

$\Rightarrow (\cos\varphi, \sin\varphi) = (\cos\theta, -\sin\theta)$
$= (\cos(-\theta), \sin(-\theta))$.

Dette betyr at $\varphi = -\theta$.

$\Rightarrow S\rho_\theta = \rho_{-\theta}S$. $\square$

Tilleggsoppgave:

$m: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ faktoriserer

$m = t_{(1,1)} \rho_{\frac{\pi}{2}}$.

a) Finn fikspunktet.

b) Finn rotasjonsvinkelen om dette punktet.

---

a) La $X = (x_1, x_2)$. Vi vil løse ligningen $t_{(1,1)} \rho_{\frac{\pi}{2}}(X) = X$. Da er X et fikspunkt.

Her er $\rho_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Så $t_{(1,1)} \rho_{\frac{\pi}{2}}(X) = \cancel{(1,1) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

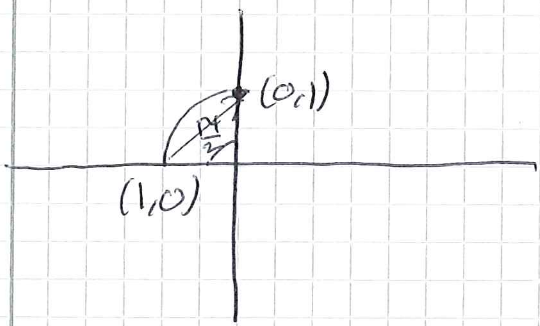
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_2 \\ 1 + x_1 \end{pmatrix}.$$

Vi løser da: $(1 - x_2, 1 + x_1) = (x_1, x_2)$.

$\Rightarrow \quad 1 - x_2 = x_1 \quad$ og $\quad 1 + x_1 = x_2$.

Dette systemet har løsning $x_1 = 0, x_2 = 1$.

$\Rightarrow \quad x = (0,1)$.



En rotasjon om x er på formen $t_x \rho_\theta t_{-x}$. Vi vil skrive

$$t_{(1,1)} \rho_{\frac{\pi}{2}} = t_x \rho_\theta t_{-x} = t_{(0,1)} \rho_\theta t_{(0,-1)}.$$

$$\Rightarrow \quad t_{(0,-1)} t_{(1,1)} \rho_{\frac{\pi}{2}} = t_{(0,-1)} t_{(0,1)} \rho_\theta t_{(0,-1)}$$

$$\Rightarrow \quad t_{(1,0)} \rho_{\frac{\pi}{2}} = \rho_\theta t_{(0,-1)}$$

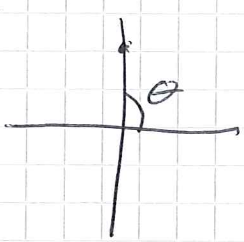
$$\Rightarrow \quad t_{(1,0)} \rho_{\frac{\pi}{2}} t_{(0,1)} = \rho_\theta t_{(0,-1)} t_{(0,1)}$$

$$\Rightarrow \quad t_{(1,0)} \rho_{\frac{\pi}{2}} t_{(0,1)} = \rho_\theta.$$

~~Velg nå~~ ~~x~~ La $e_1 = (1,0)$ være standardvektoren. Da er $\rho_\theta e_1 = (\cos\theta, \sin\theta)$ og $t_{(1,0)} \rho_{\frac{\pi}{2}} t_{(0,1)} (e_1) = t_{(1,0)} \rho_{\frac{\pi}{2}} (1,1)$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$ Så $(\cos\theta, \sin\theta) = (0,1)$



$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$

Vinkelen er altså den samme,

og $t_{(1,1)}\, \rho_{\frac{\pi}{2}} = t_{(0,+1)}\, \rho_{\frac{\pi}{2}}\, t_{(0,-1)}.$ $\square$