7. La m være orienteringsreverserende.
Da kan m skrives som $m = t_a p_\theta s$
for en vinkel θ og vektor a.
Vi skal vise at m^2 er en translasjon.

$$m^2 = (t_a p_\theta s)(t_a p_\theta s)$$
$$= t_a p_\theta s t_a p_\theta s.$$

Husk fra oppgave 6 at: $\cancel{s t_a = t_{sa} s}$.

i) $s t_a = t_{sa} s$

ii) $s p_\theta = p_{-\theta} s$

iii) $p_\theta t_a = t_{p_\theta a} p_\theta$

Da er $m^2 = t_a p_\theta s t_a p_\theta s$ (Bruker i))

$= t_a p_\theta t_{sa} s p_\theta s$ (Bruker ii))

$= t_a p_\theta t_{sa} p_{-\theta} s s$ (Bruker $ss = id$)

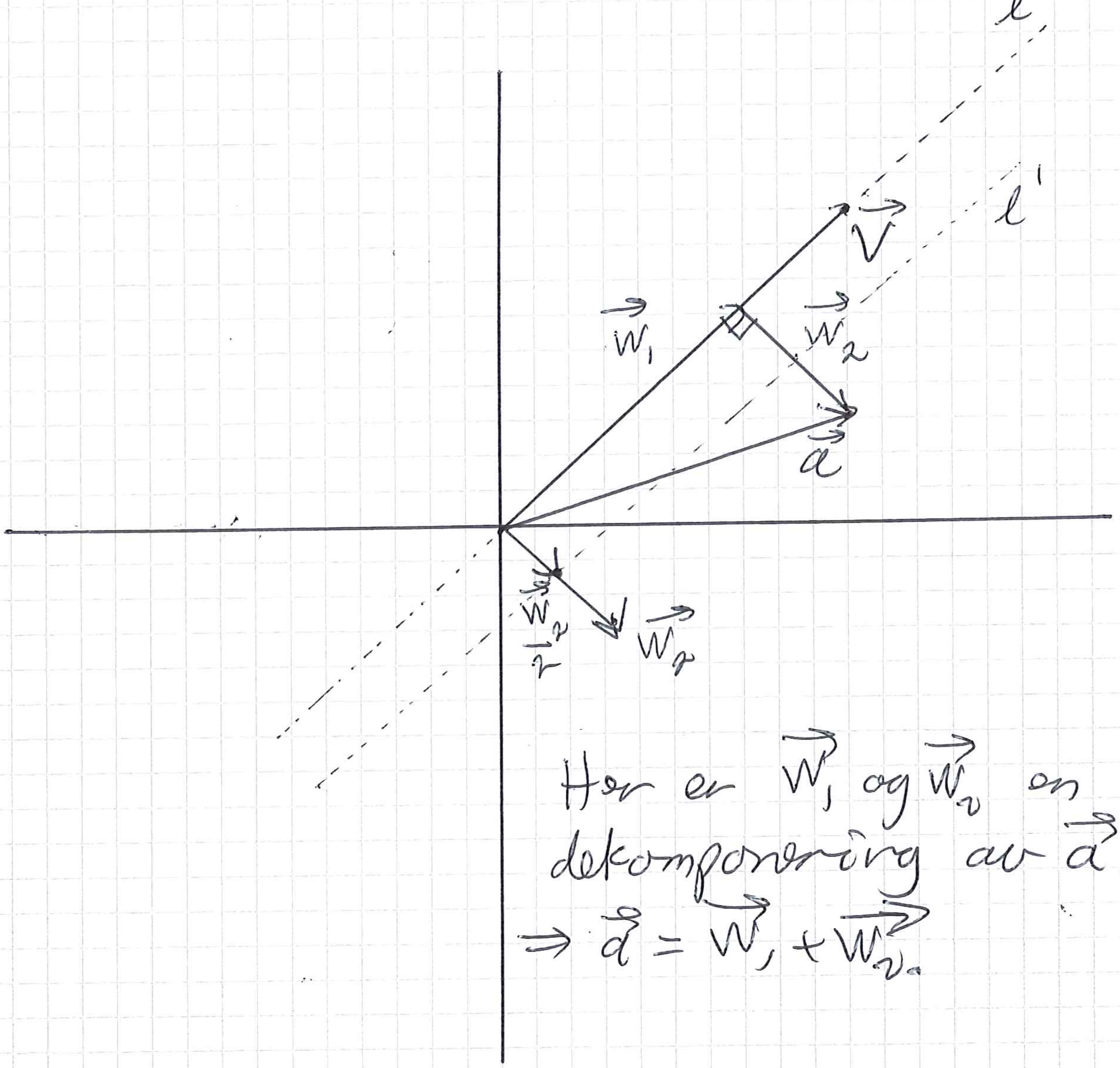
$= t_a p_\theta t_{sa} p_{-\theta}$ (Bruker iii))

$= t_a t_{p_\theta sa} p_\theta p_{-\theta}$ (Bruker $p_\theta p_{-\theta} = id$)

$= t_a t_{p_\theta sa}$

$= \underline{\underline{t_{a+p_\theta sa}}}$ Dette er en translasjon.

8. ... ℓ' er linja $\{\frac{1}{2}w_2 + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Vi påstår at $t_a S_\ell = t_{w_1} S_{\ell'}$.



Her er $\vec{w}_1$ og $\vec{w}_2$ en dekomponering av $\vec{a}$.

$\Rightarrow \vec{a} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$.

Se oppgave 11. for et argument for at

i) $S_{\ell'} = t_{\frac{1}{2}\vec{w}_2} S_\ell \, t_{-\frac{1}{2}\vec{w}_2}$.

~~Videre har vi fra oppgave ... at~~

~~ii) $S_\ell t_{\frac{1}{2}\vec{w}_2}(\vec{x}) = S_\ell(\vec{x}) +$~~

Videre har vi at

$$S_e t_{-\frac{1}{2}\vec{w}_2}(\vec{x}) = S_e(\vec{x} - \tfrac{1}{2}\vec{w}_2) = S_e\vec{x} - S_e(\tfrac{1}{2}\vec{w}_2)$$
$$= S_e\vec{x} - \tfrac{1}{2}S_e(\vec{w}_2)$$

siden S_e er lineær (har fikspunkt i origo).

$\vec{w}_2$ står normalt på l, så $S_e(\vec{w}_2) = -\vec{w}_2$.

$$\Rightarrow S_e t_{-\frac{1}{2}\vec{w}_2}(\vec{x}) = S_e(\vec{x}) + \tfrac{1}{2}\vec{w}_2$$
$$= t_{\frac{1}{2}\vec{w}_2} S_e(\vec{x}).$$

Altså har vi

ii) $S_e t_{-\frac{1}{2}\vec{w}_2} = t_{\frac{1}{2}\vec{w}_2} S_e$.

Dette gir:

$$t_{\vec{w}_1} S_{e'} \overset{i)}{=} t_{\vec{w}_1} t_{\frac{1}{2}\vec{w}_2} S_e t_{-\frac{1}{2}\vec{w}_2}$$

$$\overset{ii)}{=} t_{\vec{w}_1} t_{\frac{1}{2}\vec{w}_2} t_{\frac{1}{2}\vec{w}_2} S_e$$

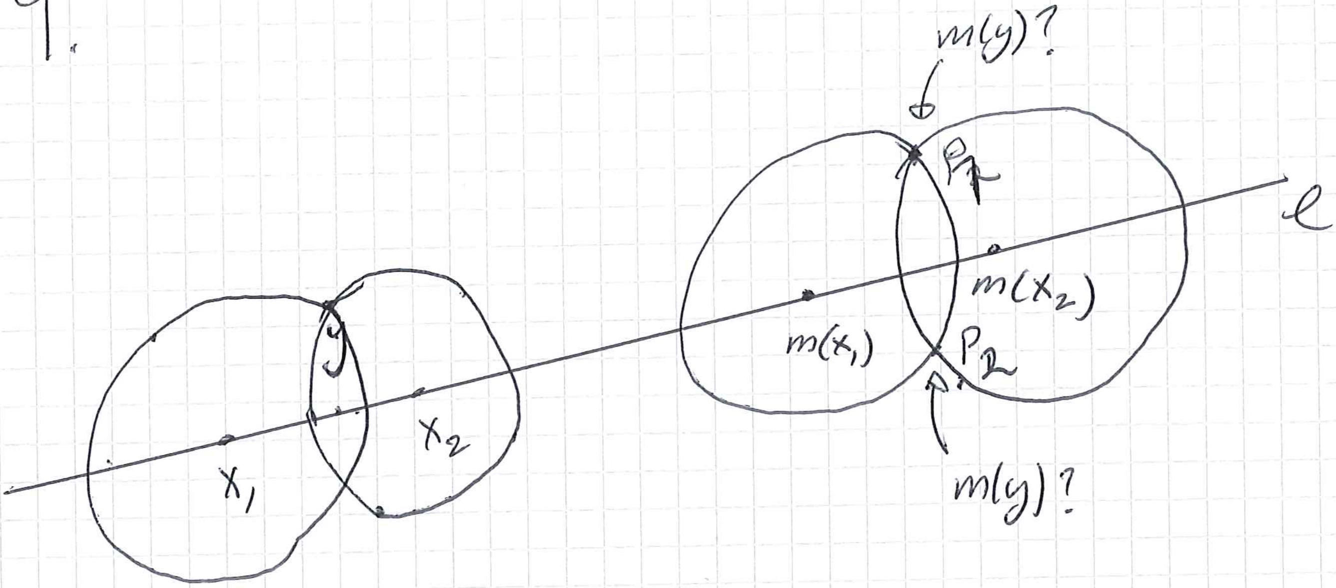
$$= t_{\vec{w}_1 + \frac{1}{2}\vec{w}_2 + \frac{1}{2}\vec{w}_2} S_e$$

$$= t_{\vec{w}_1 + \vec{w}_2} S_e$$

$$= t_{\vec{a}} S_e.$$

Den siste likheten stemmer siden $\vec{a} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$

9.



Anta først at $\vec{a} \neq 0$. Fiksèr to forskjellige punkter x_1 og x_2 på l. m fikserer l, så $m(x_1)$ og $m(x_2)$ ligger også på l. Siden m er en translasjon ~~restrict~~ med $\vec{a}$ restriktert til l, må $\vec{a}$ være en retnings-vektor til l. ~~og lengden mellom $m(x_1)$ og~~

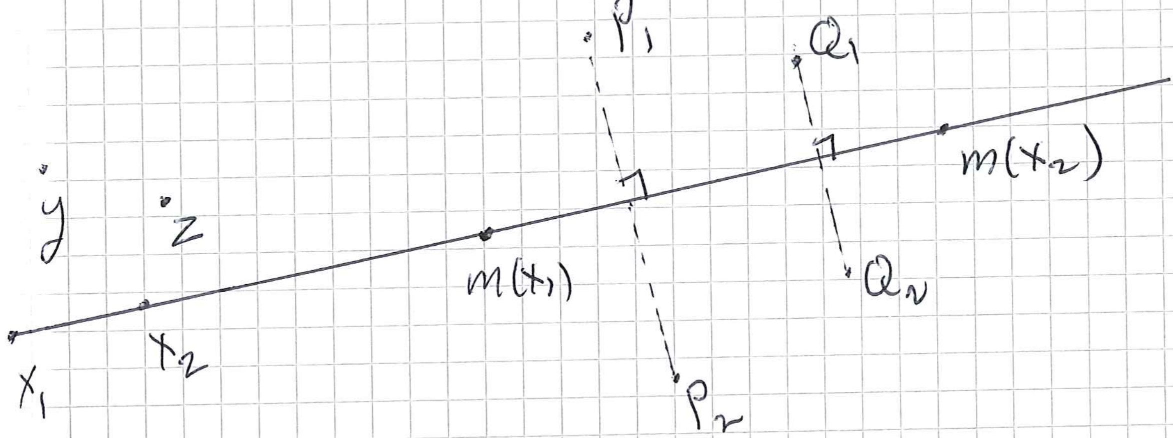
m er en isometri, så $d(x_1, x_2) = d(m(x_1), m(x_2))$.

Altså er avstanden mellom x_1 og x_2 den samme som mellom $m(x_1)$ og $m(x_2)$.

La y være et generelt punkt utenfor linja.

Tegn to sirkler som går gjennom y, med sentrum i henholdsvis x_1 og x_2. Siden m bevarer avstand, må alle punktene i hver sirkel sendes til de tilsvarende sirklene med sentrum i $m(x_1)$ og $m(x_2)$.

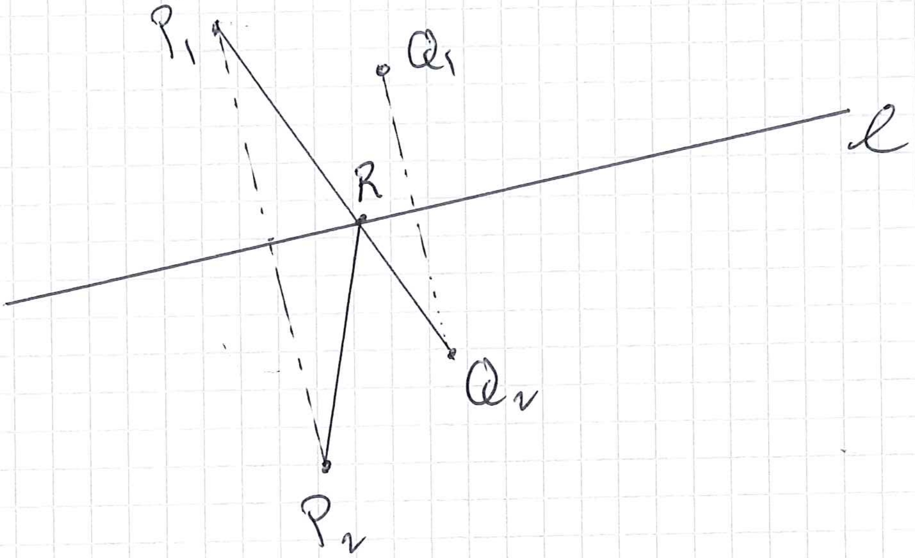
~~Mt~~ Det er dermed to muligheter for hvor $m(y)$ befinner seg, nemlig i de to skjæringspunktene mellom de to sirklene om $m(x_1)$ og $m(x_2)$. ~~Merk at~~ Kall disse punktene P_1 og P_2.



Merk at P_2 er speilingen av P_1 om l.

Hvis z er et annet generelt punkt, er det tilsvarende to muligheter for ~~m~~(z), Q_1 og Q_2. Anta at y og z er på samme side av l. Det betyr at $m(y)$ og $m(z)$ må være på samme side av l også. Dvs enten er $m(y)=P_1$ og $m(z)=Q_1$, eller så er $m(y)=P_2$ og $m(z)=Q_2$. Grunnen til dette er at avstanden mellom ~~[illegible]~~ y og z

er det samme som avstanden mellom P_1 og Q_1, og avstanden mellom P_2 og Q_2.



Vi trekker linjen mellom P_1 og Q_2, og kall skjæringspunktet med l for R.
Trekk linjen mellom R og P_2. Av symmetri er lengdene til RP_1 og RP_2 den samme.

Det betyr at
$$|P_1Q_2| = |P_1R| + |RQ_2| = |P_2R| + |RQ_2|$$
som er større enn $|P_2Q_2|$.

Altså har vi bevist påstanden om at $m(y)$ og $m(z)$ må være på samme side.

Totalt sett betyr dette at enten sender m alt over linjen l til punkter over l, eller sender m alt over linjen l til punkter under l. Tilsvarende sender m alt under l til enten over eller under l. Men m kan ikke sende alt over og under l til over l, for m er en bijeksjon av planet. Tilsvarende ~~så~~ ~~l~~ kan ikke m sende alt over og under l til under l. ~~A~~

Konklusjonen blir da: Enten så sender m

i) Alt over l til under l, og alt under l til over l.

eller

ii) Alt over l til over l, og alt under l til under l.

Merk at x_1, $m(x_1)$, y og P_1 danner et parallellogram. Det betyr at

$$\vec{P_1} = \vec{y} + \vec{a}, \text{ som vektorer.}$$

Hvis $s_e(\vec{y})$ er speilingen til $\vec{y}$, så er $\vec{a} + s_e(\vec{y}) = \vec{P_2}$ av samme grunn, siden $s_e(\vec{y})$ er det andre sirkelskjæringspunktet.

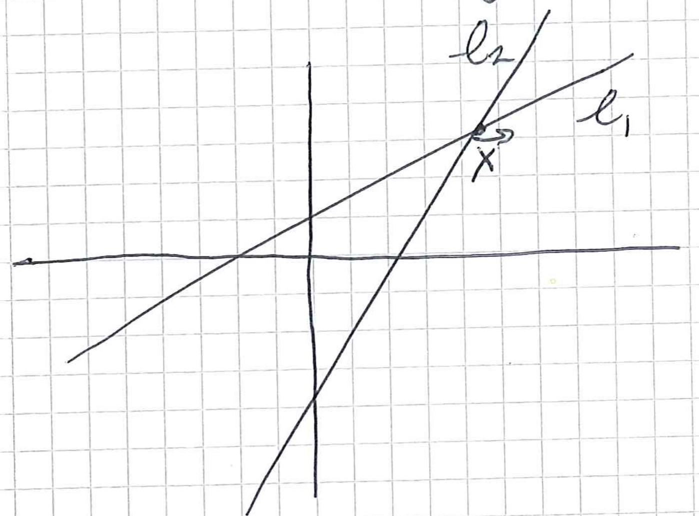
~~Da I tilfellet ii) så er $m(\vec{y}) = \vec{P_1}$, og i tilfellet i)~~

I tilfellet ii) så er $m(\vec{y}) = \vec{P_1} = \vec{y} + \vec{a} = t_{\vec{a}}\vec{y}$ for alle $\vec{y}$. I tilfellet i) så er

$$m(\vec{y}) = \vec{a} + s_e(\vec{y}), \cancel{\text{for alle } \vec{y}}.$$
$$= t_{\vec{a}} s_e(\vec{y}) \text{ for alle } \vec{y}.$$

Med andre ord så er $m = t_{\vec{a}}$ eller $m = t_{\vec{a}} s_e$. En translasjon, eller en speiling. Fører vi et liknende argument for $\vec{a} = \vec{0}$, får vi at $m = \cancel{t_{\vec{a}}}$ id, eller $m = s_e$. Identiteten eller en speiling.

11. La l_1 og l_2 være to linjer i planet, som ikke er parallelle. Da har de et skjæringspunkt $\vec{x}$.



Skjæringspunktet $\vec{x}$ er da et felles fikspunkt for S_{l_1} og S_{l_2}. Dvs $S_{l_1}(\vec{x}) = \vec{x}$, $S_{l_2}(\vec{x}) = \vec{x}$. La $m = S_{l_2} S_{l_1}$ være sammensetningen. Da er ~~m(x~~

$m(\vec{x}) = S_{l_2} S_{l_1}(\vec{x}) = S_{l_2}(\vec{x}) = \vec{x}$. Så $\vec{x}$ er et fikspunkt for m.

Viser på isometrien $t_{-\vec{x}} m t_{\vec{x}}$ Denne har et fikspunkt i origo, siden

$\cancel{t_{-\vec{x}} m}$ $\cancel{t_{-\vec{x}} m(\vec{o})}$

$$t_{-\vec{x}} m t_{\vec{x}}(\vec{o}) = t_{-\vec{x}} m(\vec{x}) = t_{-\vec{x}}(\vec{x}) = \vec{x} - \vec{x} = \vec{o}$$

Siden S_{l_1} og S_{l_2} er orienteringsreverserende, må $m = S_{l_2} S_{l_1}$ være orienteringsbevarende.

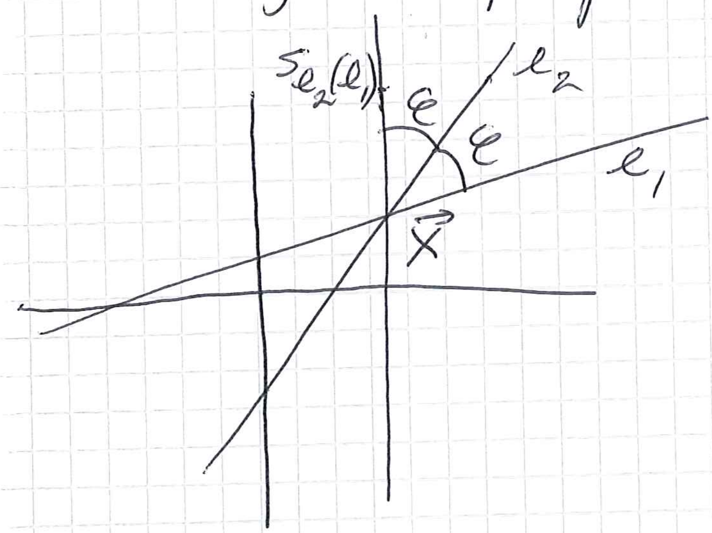
Altså er $t_{-\vec{x}}\, m\, t_{\vec{x}}$ også orienteringsbevarende med fikspunkt i origo. Det betyr at den er lik en rotasjon ~~ρ_Θ~~ ρ_Θ.

$$t_{-\vec{x}}\, m\, t_{\vec{x}} = \rho_\Theta \Rightarrow m = t_{\vec{x}}\, \rho_\Theta\, t_{-\vec{x}}.$$

Altså er m en rotasjon om skjæringspunktet mellom l_1 og l_2, med vinkel Θ.

Merk nå at $m(l_1) = s_{l_2} s_{l_1}(l_1)$
$= s_{l_2}(l_1)$

er linjen l_1 speilet om l_2:



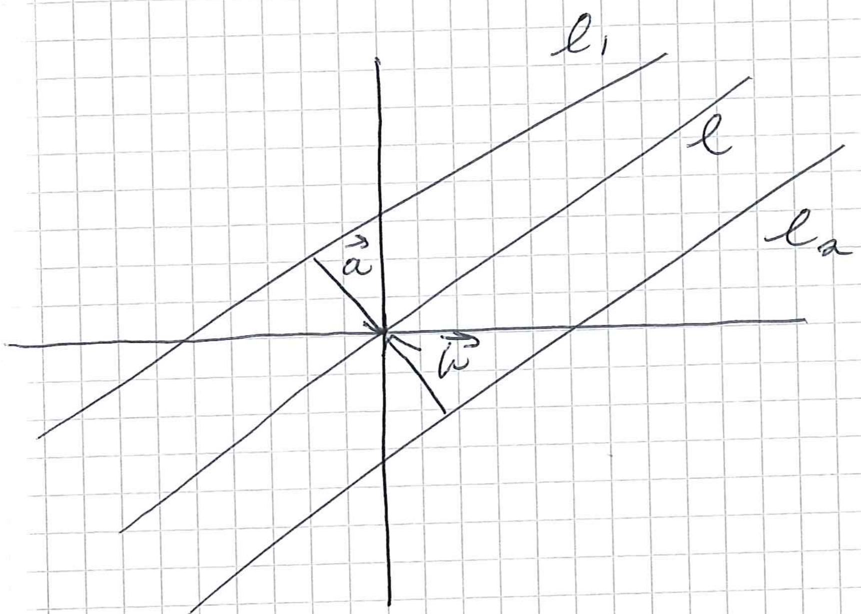
~~Vinkelen~~ Vinkelen mellom l_1 og l_2 er lik vinkelen mellom l_2 og $s_{l_2}(l_1)$. Kall denne φ.

Nå vet vi at m er en rotasjon med Θ i $\vec{x}$, og et punkt på l_1 blir rotert med 2φ radianer, som vist på figuren. Dvs: $\Theta = 2\varphi$.

Konklusjonen blir at

$m = s_{\ell_1} s_{\ell_2} = t_{-\vec{x}}\, \rho_{2\varphi}\, t_{\vec{x}}$, en rotasjon om skjæringspunktet $\vec{x}$ med vinkel 2φ, der φ er vinkelen mellom ℓ_1 og ℓ_2.

Anta nå at l_1 og l_2 er parallelle.



La l være ~~en~~ linjen gjennom origo som er parallell med begge, og la $\vec{a}$ og $\vec{w}$ være normalvektorene fra henholdsvis l_1 og l_2 til l. Det å speile om l_1, er det samme som å translere med $\vec{a}$, speile om l, og translere tilbake. Dette er fordi $t_{\vec{a}}(l_1) = l$. Dvs at $s_{l_1} = t_{-\vec{a}} s_l t_{\vec{a}}$. Tilsvarende har vi at

$s_{l_2} = t_{-\vec{w}} s_l t_{\vec{w}}$. s_l har et fikspunkt i origo, og er dermed en ortogonal matrise. Det betyr at s_l er ~~[illegible]~~ en lineær funksjon.

Det betyr at:

$$m = s_{e_2} s_{e_1} = \cancel{t_{-\vec{b}} s_e t_{\vec{b}} t_{-\vec{a}} s_e t_{\vec{a}}}$$

$$= t_{-\vec{b}} s_e t_{\vec{b}} t_{-\vec{a}} s_e t_{\vec{a}}.$$

La $\vec{x}$ være et generelt punkt i planet.

Da er

$$\begin{aligned}
m(\vec{x}) &= t_{-\vec{b}} s_e t_{\vec{b}} t_{-\vec{a}} s_e t_{\vec{a}} (\vec{x}) \\
&= t_{-\vec{b}} s_e t_{\vec{b}} t_{-\vec{a}} s_e (\vec{x} + \vec{a}) \\
&= t_{-\vec{b}} s_e t_{\vec{b}-\vec{a}} (s_e(\vec{x}) + s_e(\vec{a})) \\
&= t_{-\vec{b}} s_e (s_e(\vec{x}) + s_e(\vec{a}) + \vec{b} - \vec{a}) \\
&= t_{-\vec{b}} (s_e s_e(\vec{x}) + s_e s_e(\vec{a}) + s_e(\vec{b}) - s_e(\vec{a})) \\
&= t_{-\vec{b}} (\vec{x} + \vec{a} + s_e(\vec{b}) - s_e(\vec{a})) \\
&= \vec{x} + \vec{a} + s_e(\vec{b}) - s_e(\vec{a}) - \vec{b} \\
&= \vec{x} + (\vec{a} - \vec{b} + s_e(\vec{b} - \vec{a})) \\
&= t_{\vec{a}-\vec{b}+s_e(\vec{b}-\vec{a})} (\vec{x}).
\end{aligned}$$

m er altså en translasjon, $m = t_{\vec{a}-\vec{w}+s_l(\vec{w}-\vec{a})}$.

Merk at $\vec{a} - \vec{w} + s_l(\vec{w} - \vec{a}) = 0$

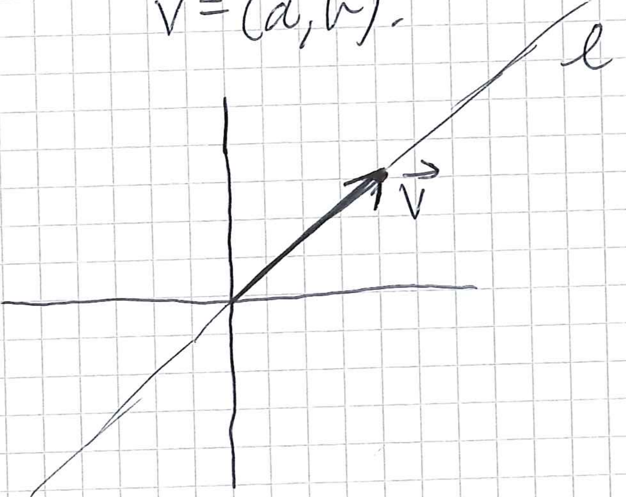
$\Leftrightarrow s_l(\vec{w} - \vec{a}) = \vec{w} - \vec{a}$.

$\Leftrightarrow \vec{w} - \vec{a}$ ligger på linja l.

~~Men~~ $\vec{w}$ og $\vec{a}$ er parallelle siden begge ligger på ~~linja~~ normallinja til l gjennom origo. Det betyr at $\vec{w} = \vec{a}$ for at det over skal være tilfelle. Med andre ord at $l_1 = l_2$.

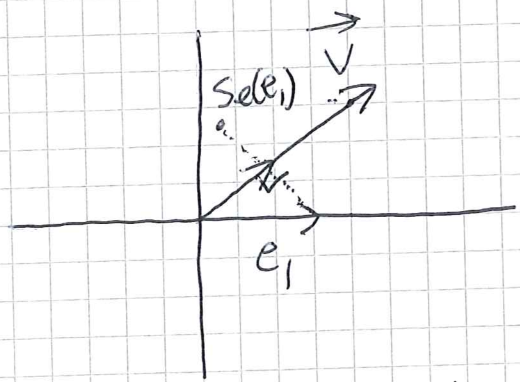
Konklusjonen blir at sammensetningen $m = s_{l_2} s_{l_1}$ er en translasjon $t_{\vec{o}}$ der $\vec{o} = \vec{0}$ hvis og bare hvis l_1 og l_2 er like.

1.12 l er linjen gjennom origo med vektor $\vec{v} = (a, b)$.



Speilingen S_l har et fikspunkt, og er dermed en (ortogonal) matrise.

For å finne kolonnene til S_l, ser vi på hva S_l gjør med enhetsvektorene $\vec{e}_1$ og $\vec{e}_2$.

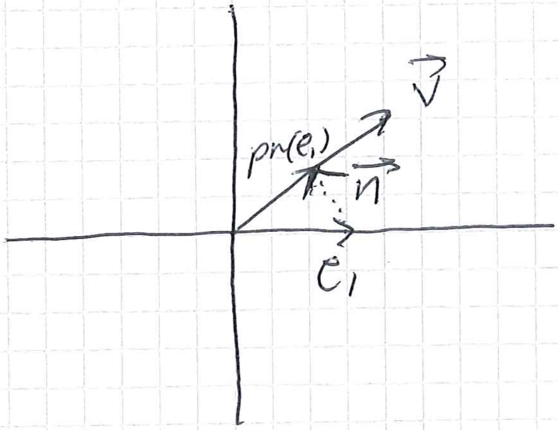


(e_1 speiles om l)

Først finner vi projeksjonsvektoren $pr(\vec{e}_1)$ av $\vec{e}_1$ ned på l. Den er gitt ved

$$pr(e_1) = \vec{v} \cdot \left(\frac{e_1 \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right)$$

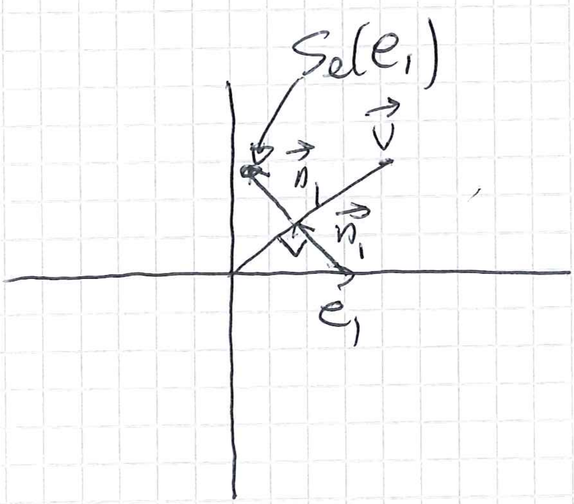
Her er $|\vec{v}|^2 = a^2 + b^2$.



$$pr(\vec{e}_1) = (a,b)\left(\frac{(1,0)\cdot(a,b)}{a^2+b^2}\right)$$
$$= (a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)$$
$$= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2}, \frac{ab}{a^2+b^2}\right).$$

Normal vektoren $\vec{n}_1$ ~~av e~~ fra $(1,0)$ til linjen l er da gitt ved $\vec{n}_1 = pr(\vec{e}_1) - \vec{e}_1$.
Altså $\vec{n}_1 = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2}, \frac{ab}{a^2+b^2}\right) - (1,0) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} - 1, \frac{ab}{a^2+b^2}\right)$.

For å finne speilingen til $\vec{e}_1$ går vi fra $(1,0)$ med to ganger normal-vektoren $\vec{n}_1$



Dvs: $S_e(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{n}_1$.

$$\Rightarrow S_e(e_1) = \vec{e}_1 + 2(pr(\vec{e}_1) - \vec{e}_1)$$
$$= 2pr(\vec{e}_1) - \vec{e}_1$$
$$= 2\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}, \frac{ab}{a^2+b^2}\right) - (1,0)$$
$$= \left(\frac{2a^2}{a^2+b^2} - 1, \frac{2ab}{a^2+b^2}\right)$$

$$= \left(\frac{2a^2 - (a^2+b^2)}{a^2+b^2}, \frac{2ab}{a^2+b^2} \right)$$

$$= \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2+b^2}, \frac{2ab}{a^2+b^2} \right).$$

Første kolonne til matrisen til S_e blir da $\begin{pmatrix} \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \\ \frac{2ab}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$.

For $\vec{e_2}$ har vi tilsvarende

$$pr(\vec{e_2}) = \vec{v}\left(\frac{\vec{e_2}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right) = (a,b)\left(\frac{(0,1)\cdot(a,b)}{a^2+b^2}\right)$$

$$= (a,b)\left(\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{ab}{a^2+b^2}, \frac{b^2}{a^2+b^2}\right).$$

Normalvektoren blir $\vec{n_2} = pr(\vec{e_2}) - \vec{e_2}$, og $S_e(\vec{e_2}) = \vec{e_2} + 2\vec{n_2} = 2pr(\vec{e_2}) - \vec{e_2}$ som sist.

$$\Rightarrow S_e(\vec{e_2}) = 2\left(\frac{ab}{a^2+b^2}, \frac{b^2}{a^2+b^2}\right) - (0,1)$$

$$= \left(\frac{2ab}{a^2+b^2}, \frac{2b^2}{a^2+b^2} - 1\right)$$

$$= \left(\frac{2ab}{a^2+b^2}, \frac{2b^2-(a^2+b^2)}{a^2+b^2}\right)$$

$$= \left(\frac{2ab}{a^2+b^2}, \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\right).$$

Den andre kolonnen til S_e blir da

$$\begin{pmatrix} \frac{2ab}{a^2+b^2} \\ \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix}.$$

Dette betyr da at

$$S_e = \begin{pmatrix} \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} & \frac{2ab}{a^2+b^2} \\ \frac{2ab}{a^2+b^2} & \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$$

10. <u>Teorem 2.4</u> En isometri av planet er enten en translasjon, en rotasjon, en speiling eller glidespeiling.

Sammensetningen av to rotasjoner er orienteringsbevarende, så den må være en rotasjon eller en translasjon.

Viser på to ~~f~~ generelle rotasjoner

$$r_1 = t_{\vec{x}}\,\rho_\theta\,t_{-\vec{x}}, \quad r_2 = t_{\vec{y}}\,\rho_\varphi\,t_{-\vec{y}}$$

~~Anna~~ Da er $r_1 r_2 = t_{\vec{x}}\,\rho_\theta\,t_{-\vec{x}}\,t_{\vec{y}}\,\rho_\varphi\,t_{-\vec{y}}$

$$= t_{\vec{x}}\,\rho_\theta\,t_{\vec{y}-\vec{x}}\,\rho_\varphi\,t_{-\vec{y}}$$

Her bruker vi oppgv 6.

$$= t_{\vec{x}}\,t_{\rho_\theta(\vec{y}-\vec{x})}\,\rho_\theta\,\rho_\varphi\,t_{-\vec{y}}$$

$$= t_{\vec{x}+\rho_\theta(\vec{y}-\vec{x})}\,\rho_{\theta+\varphi}\,t_{-\vec{y}}$$

$$= t_{\vec{x}+\rho_\theta(\vec{y}-\vec{x})}\,t_{\rho_{(\theta+\varphi)}(-\vec{y})}\,\rho_{\theta+\varphi}$$

$$= t_{\vec{x}+\rho_\theta(\vec{y}-\vec{x})+\rho_{(\theta+\varphi)}(-\vec{y})}\,\rho_{\theta+\varphi}.$$

Dette er en translasjon kun dersom

$\varphi + \theta = 0$. Dvs $\theta = -\varphi$.

13: Vi skal bestemme symmetrigruppene til

a) likebeint trekant

b) likesidet trekant

c) parabel

d) parallellogram

e) rombe

f) rektangel

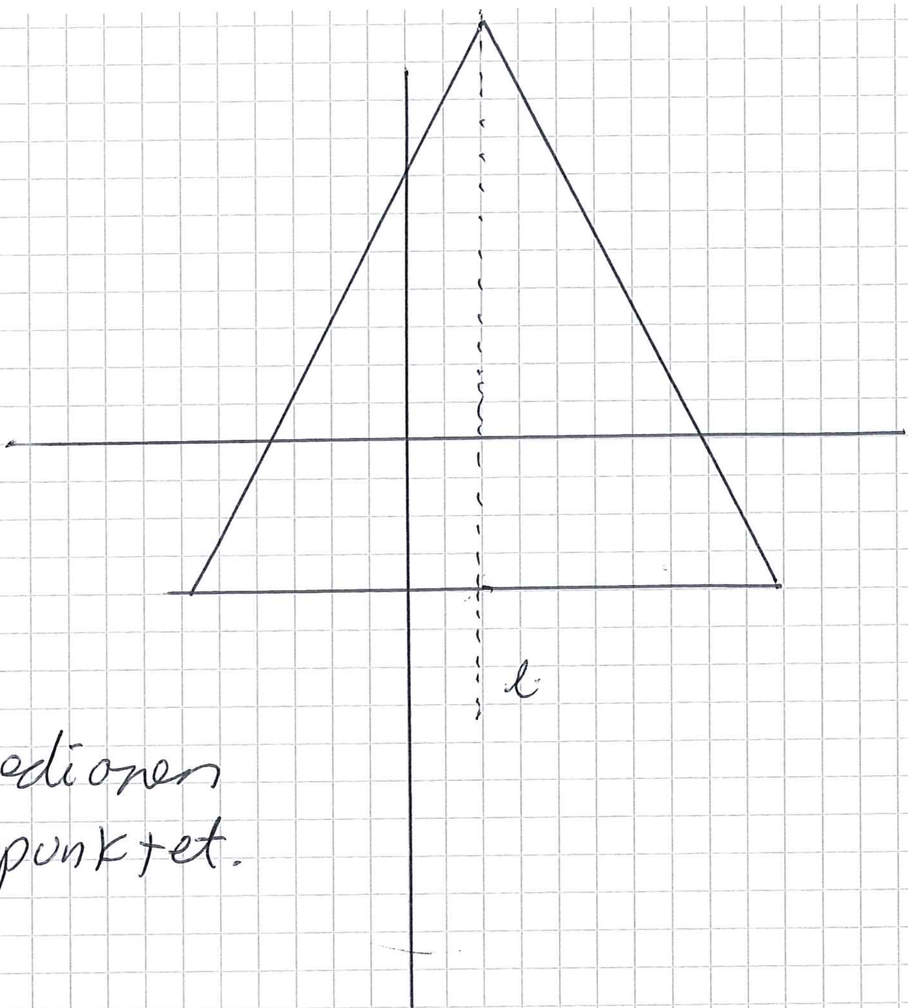
g) ellipse.

Vi betegner gruppen ved G i hvert tilfelle, og lister opp elementene, ~~og deres produkter i hvert~~

og sammensetningene i en tabell. (Cayley-tabell)

~~Merk~~ Vi bruker Teorem 2.4, og anser dette som underforstått i oppgavene. Siden midtpunktet til figurene blir bevart, kan ingen symmetrier være translasjoner eller glidespeilinger. Altså er det kun rotasjoner og speilinger som er mulig.

a)



l er medianen fra toppunktet.

$G = \{id, s_l\}$

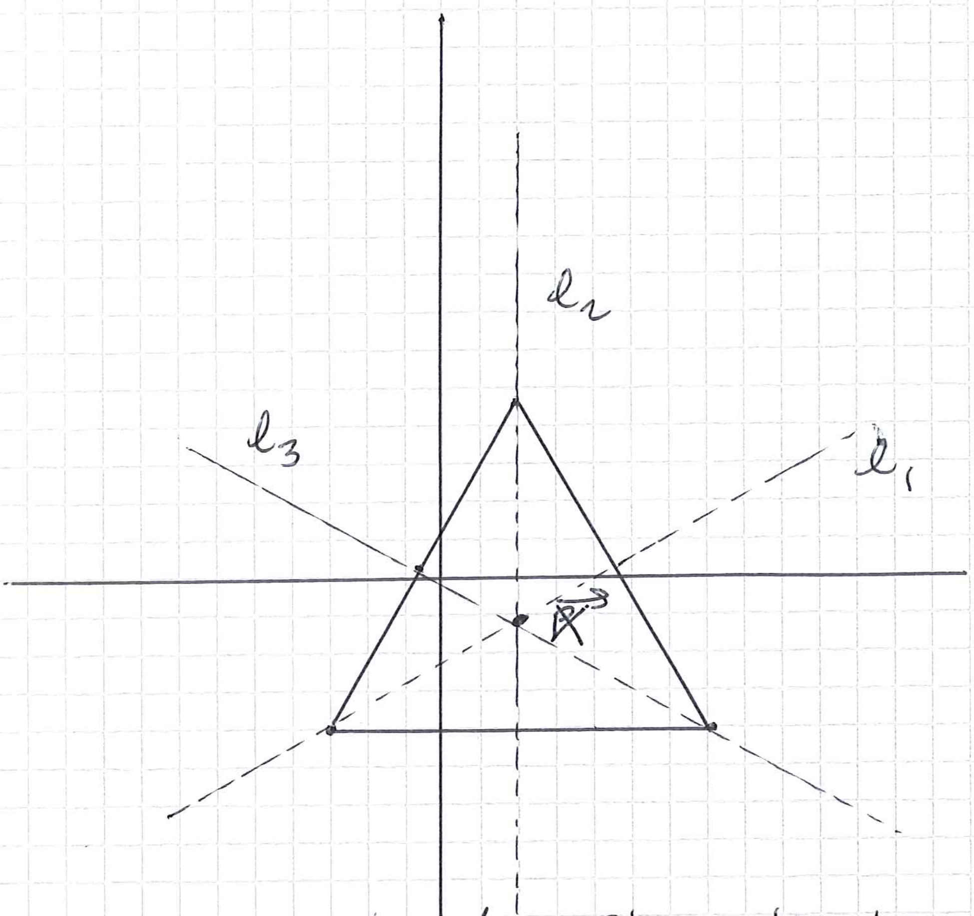
Vi merker at symmetriene må fiksere toppunktet og linja l. Altså kun identiteten og en speiling om l.

$*$	id	s_l
id	id	s_l
s_l	s_l	id

Tabellen viser ~~[illegible]~~ sammensetningene mellom elementene

F.eks er $s_l s_l = id$

b)



$\vec{X}$ betegner omsenteret til trekanten.

$G = \{id, S_{l_1}, S_{l_2}, S_{l_3}, t_{\vec{x}}\rho_{\frac{2\pi}{3}}t_{-\vec{x}}, t_{\vec{x}}\rho_{\frac{4\pi}{3}}t_{-\vec{x}}\}$.

Denne gruppen svarer til den dihedrale gruppen D_n (Dvs $G \cong D_n$).

~~Vi rot~~ l_1, l_2, l_3 er medianene, og rotasjonene er om omsenteret $\vec{x}$.

~~Vi lar $r_1 = t_{\vec{x}}\rho_{\frac{2\pi}{3}}t_{-\vec{x}}$ og $r_2 = t_{\vec{x}}\rho_{\frac{4\pi}{3}}t_{-\vec{x}}$~~ i ~~tabellen.~~