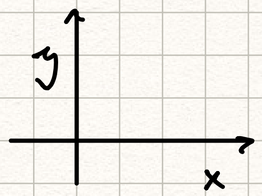
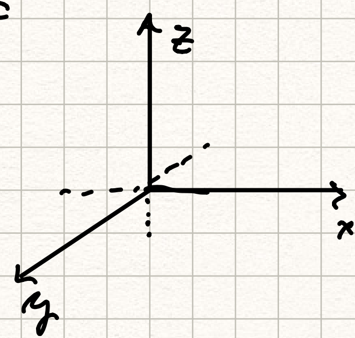
Det euklidske rommet

$$E^n = \mathbb{R}^n = \{(a_1,\dots,a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}\} \text{ som mengde}$$

E^2



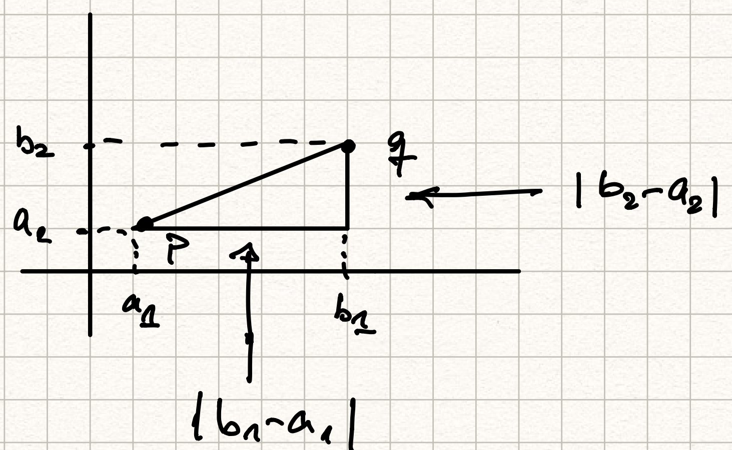
E^3



Avstand i E^2:

$p = (a_1, a_2)$

$q = (b_1, b_2)$



Pytagoras: $\underline{\underline{d(p,q)}} = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2}$

Generellt

Prikkproduktet: $p = (a_1,\dots,a_n)$, $q = (b_1,\dots,b_n)$

$$p \cdot q = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Normen: $\|p\| = \sqrt{p \cdot p} = \sqrt{\sum a_i^2}$

Avstand: $d(p,q) = \|q - p\|$

Euklidsk rom E^n er $\mathbb{R}^n$ med denne avstandsfunksjon.

"Bevegelse" ~ bijektiv funksjon $E^n \to E^n$.

Husk: $f: X \to Y$, funksjon av mengder X, Y

- injektiv : $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
- surjektiv : for alle $y \in Y$ finnes $x \in X$ med $f(x) = y$. $f(X) = Y$.

Bijektiv : injektiv & surjektiv
1-1 korrespondanse, hvert element i X svarer via f til nøyaktig ett element av Y.

- f er bijektiv $\Longleftrightarrow$ f har invers funksjon $f^{-1}: Y \to X$, $f \circ f^{-1} = id_Y$ & $f^{-1} \circ f = id_X$.
(Oppgave.)

- $f, g: X \to X$ to bijektive funksjoner $\Longrightarrow$ $f \circ g$ er bijektiv. (oppgave)

En isometri (stiv bevegelse) er en bijektiv funksjon $m: E^n \to E^n$ som bevarer avstand, dvs

$$d(m(p), m(q)) = d(p, q)$$

for alle punkter p, q.

Isom_n = mengden av isometrier på E^n.

$$\boxed{\text{Første mål: klassifiser } \mathrm{Isom}_2 \text{ fullstendig.}}$$

Struktur på Isom_n. Sammensetting ✓ $m \circ m'(p) = m(m'(p))$.

- $m, m' \in \mathrm{Isom}_n \Rightarrow m \circ m' \in \mathrm{Isom}_n$

<u>Fordi</u> m, m' bijektiv $\Rightarrow m \circ m'$ bijektiv 8

$$d(m \circ m'(p), m \circ m'(q)) = d(m(m'(p)), m(m'(q)))$$

$$\underset{m \text{ isometri}}{=} d(m'(p), m'(q)) \underset{m' \text{ isometri}}{=} d(p,q).$$

- $m \in \mathrm{Isom}_n \Rightarrow m^{-1} \in \mathrm{Isom}_n$

<u>Fordi</u> $d(m^{-1}(p), m^{-1}(q)) \underset{m \text{ isometri}}{=} d(m(m^{-1}(p)), m(m^{-1}(q)))$

$$= d(p,q).$$

Isom_n er en <u>gruppe</u> under sammensetting.

<u>Grupper</u>.

G mengde, <u>binær operasjon</u> på G er en funksjon

$$G \times G \to G$$
$$(g,h) \mapsto gh$$

<u>Eks</u>:

- $\mathrm{Isom}_n \times \mathrm{Isom}_n \to \mathrm{Isom}_n$
$$(m, m') \mapsto m \circ m'$$

- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
$$(a,b) \mapsto a+b$$
eller $(a,b) \mapsto a \cdot b$

- $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$(A, B) \longmapsto A \cdot B$$

G med binær operasjon er en __gruppe__ hvis

- operasjonen er __assosiativ__ $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$
- det fins __identitets element__ $e \in G$ med egenskap

$$eg = ge = g \qquad \text{for alle } g \in G.$$

- Alle $g \in G$ har en invers, g^{-1} med egenskap

$$g \cdot g^{-1} = g^{-1} g = e$$

__Eks:__

- Isom_n er en gruppe
- $\mathbb{Z}$ med $+$ er en gruppe, 0 er id.element, inverse av n er $-n$.
- $\mathbb{Z}$ med $\cdot$ er __ikke__ en gruppe, 1 er id.el. men __ikke__ inverse

  ($\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ med $\cdot$ er en gruppe.)
- $\mathrm{Mat}_{n\times n}$ med matrise mult er ikke gruppe fordi mangler inverse, __men__

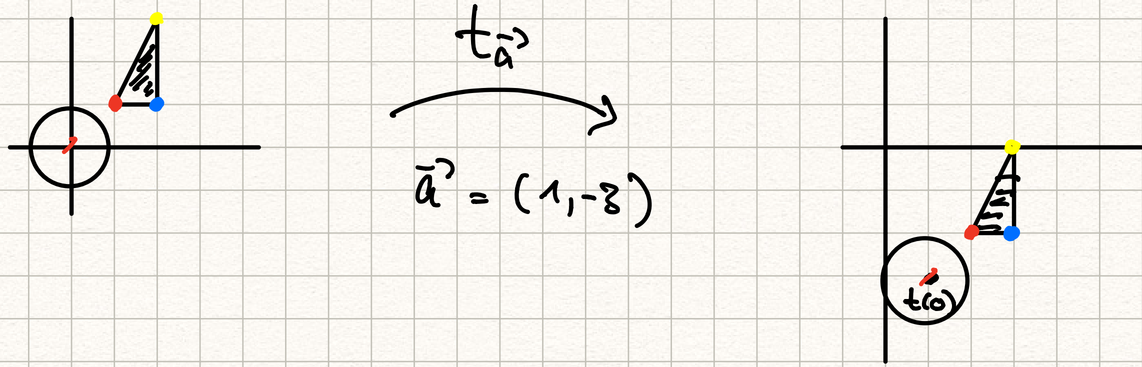
$$GL_n(\mathbb{R}) = \{ \text{invertible } n\times n \text{ matriser} / \mathbb{R} \}$$

er en gruppe. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ er id.el.

Eksempler på isometrier.

- __translasjoner__. Velg en vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$

$$t_{\vec{a}}(p) = \vec{a} + p \qquad \text{, parallell forskyvning}$$

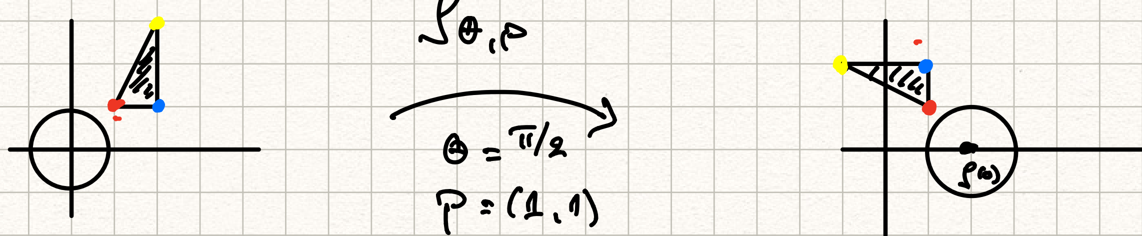


$$d(t(p), t(q)) = d(p+\vec{a}, q+\vec{a})$$

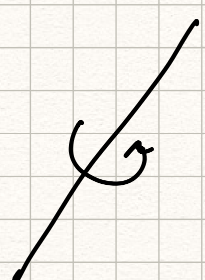
$$= \|(q+\vec{a}) - (p+\vec{a})\| = \|q-p\| = d(p,q)$$

- rotasjoner.

E^2: Fiks punkt p og vinkel $\theta \in [0, 2\pi)$
Roter alle punkter om p med vinkel θ i positiv omdreiningsretning.



E^3: Fiks linje ~ rotasjonsakse & roter med bestemt vinkel om den.



E^4: Fiks plan & roter rundt. Eller fiks 2 plan & roter med 2 forskjellige vinkler.

Blir mere komplisert i høyere dim.
Trenger å bruke lineær algebra for å beskrive.

<u>Husk:</u> En <u>lineær operator</u> på $\mathbb{R}^n$ er en lineær transformasjon $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
dvs
- $T(v+w) = T(v) + T(w)$ for $v, w \in \mathbb{R}^n$
- $T(\lambda \cdot v) = \lambda T(v)$ for $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n$

$T(0) = 0$ så T har alltid 0 som fikspunkt.

T en <u>isomorfi</u> hvis T har lineær invers, dvs T er bijektiv

Etter <u>valg av basis</u> kan vi assosiere en matrise til T ~ oppskrift: $\beta = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ basis for $\mathbb{R}^n$. Uttrykk $T(\beta_j) = \sum a_{ij} \beta_i$ i basisen β. Matrisen til T m.h.p. β er da (a_{ij})

Standard basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ $\quad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i'te plass

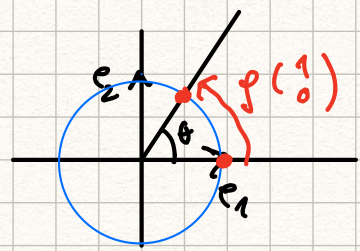
Matrisen til T m.h.p. standard basisen er <u>standard matrisen</u>.

$v = (a_1, \ldots, a_n)$

$$T(v) = A \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$ der A er st. matrisen.

<u>Husk:</u> T er isomorfi $\iff$ A er invertibel $\iff$ $\det A \neq 0$

Eks: ρ_θ rotasjon om O i E^2 med vinkel θ.



standard matrisen er $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Translasjoner er ikke lineær operatorene

Husk: $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er en ortogonal operator hvis den bevarer prikk produktet, dvs

$$T(v) \cdot T(w) = v \cdot w$$

La A være st. matrisen til T.

Sats: T ortogonal $\iff AA^t = I$

$\iff$ søylene i A utgjør en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$.

$\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ ortonormal basis hvis

$$\beta_i \cdot \beta_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Sats: En ortogonal operator er en isometri.

Hvis $m \in \mathrm{Isom}_n$ & m har O som fikspkt, $m(0) = 0$, da er m en ortogonal operator.

Eks: $(\cos\theta, \sin\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta) = 0$

$(\cos\theta, \sin\theta) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

Så f_θ ortogonal operator

Bevis: • Hvis T ortogonal, bevarer prikkproduktet

Så

$$d(T(p), T(q)) = \| T(p) - T(q) \| \underset{T \text{ lineær}}{=} \| T(p-q) \|$$

$$\underset{\text{def}}{=} \sqrt{T(p-q) \cdot T(p-q)} \underset{T \text{ ortogonal}}{=} \sqrt{(p-q)\cdot(p-q)} = d(p,q)$$

• Anta m isometri & $m(0) = 0$.

1) Påstår m bevarer prikkprodukt.

Først

$$m(p) \cdot m(p) = m(p-0) \cdot m(p-0) = d(m(p), 0)^2$$

$$\underset{0 \text{ fikspkt}}{=} d(m(p), m(0))^2 \underset{m \text{ isometri}}{=} d(p, 0)^2 = p \cdot p$$

Generellt: $m(p) \cdot m(q) = p \cdot q$?

$$d(m(p), m(q)) = d(p,q)$$

$$\Downarrow$$

$$(m(p) - m(q)) \cdot (m(p) - m(q)) = (p-q)\cdot(p-q)$$

$$\Downarrow$$

$$m(p)\cdot m(p) - 2m(p)\cdot m(q) + m(q)\cdot m(q)$$

$$= p\cdot p - 2p\cdot q + q \cdot q$$

$$\Downarrow$$

$$m(p) \cdot m(q) = p \cdot q \quad !$$

2) Må vise at m en lineær operator.

La $e_1, \dots, e_n$ ort. basis. Har nå $m(e_i) \cdot m(e_j) = e_i \cdot e_j$

så $\{ m(e_1), \dots, m(e_n) \}$ en ortonormal basis.

(Oppgave: Hvorfor er de lineært uavhengig?)

La T være den ortogonale op. med standard matrise som har $m(e_1), \dots, m(e_n)$ som søyler.

Skal vise at $m = T$, som er det samme som at $T^{-1} \circ m = id$.

Merk:

a) $T^{-1} \circ m(e_i) = T^{-1}(m(e_i)) = e_i$ for alle i

b) $T^{-1} \circ m$ bevarer prikkproduktet

Påstår $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ har egenskapene a) & b)

$\Longrightarrow$ $f = id$.

Fordi: $p = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $p \cdot e_i = a_i$

så $p \cdot e_i = q \cdot e_i$ for alle $i = 1, \dots, n \Longrightarrow p = q$.

$$f(p) \cdot e_i \underset{f(e_i) = e_i}{=} f(p) \cdot f(e_i) \underset{\text{bevarer } \cdot}{=} p \cdot e_i$$

$\Longrightarrow$ $f(p) = p$ & $f = id$ $\boxed{\text{S}}$

~

Grov klassifisering av isometrier:

<u>Sats</u>: En isometri $m \in \mathrm{Isom}_n$ kan skrives entydig

$$m = t_{\vec{a}} \circ T$$

der $t_{\vec{a}}$ er translasjon med vektor $\vec{a}$ & T er en lineær ortogonal operator.

<u>Bevis</u>: Gitt $m \in \mathrm{Isom}_n$. La $\vec{a} = m(0)$ &

se på $t_{-\vec{a}} \circ m$. Det er en isometri

og

$$t_{-\vec{a}} \circ m(0) = t_{-\vec{a}}(\vec{a}) = \vec{a} - \vec{a} = 0.$$

Så 0 er fikspkt $\Longrightarrow$ $t_{-\vec{a}} \circ m = T$

en ortogonal op $\Rightarrow$ $m = t_{\vec{a}} \circ T$. $\blacksquare$

<u>Oppgave</u>: Vis entydighet.

<u>Orientering</u>: "Quick & dirty" definisjon.

Skriv $m = t_{\vec{a}} \circ T$. Husk entydig. La A være st. matrisen til T. Nå er $\det(AA^t) = (\det A)^2 = 1$ så $\det(A) = \pm 1$.

| m er orienterings bevarende hvis $\det A = +1$.
| m er — " — reverserende — " — -1.

Viktig observasjon.

m	m'	$m \circ m'$
1	1	1
1	-1	-1
-1	1	-1
-1	-1	1

$+1$ or. bevarende

-1 or. reverserende

Bevis: oppgave. Vis først at for T, S ort. op.

$$t_{\vec{a}} T \circ t_{\vec{b}} S = t_{\vec{a} + T(\vec{b})} TS.$$