Kjeglesnitt i koordinater. (standard form)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ ellipse (utledet)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ hyperbel (se heftet s. 2)

$$y = kx^2$$ parabel (se heftet s. 2)

eller $x = 4cy^2$

Se nå generellt på et 2nd grads polynom i x, y. (vilkårlig)

Kvadratiske kurve

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

for $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Se først på rent kvadratiske del

$$q = ax^2 + bxy + cy^2$$

Kan lage symmetrisk matrise

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix}$$

Se på matrise multiplikasjon

$$[x \ y] \, A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= [x\ y] \begin{bmatrix} ax + \frac{1}{2}by \\ \frac{1}{2}bx + cy \end{bmatrix} = ax^2 + \frac{1}{2}bxy + \frac{1}{2}bxy + cy^2$$

$$= q.$$

Lineær algebra forteller oss at siden A er symmetrisk, fins inverterbar matrise P slik at

$$P A P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = D$$

en diagonal matrise. & P faktisk ortogonal!

Foretar nå ~~k~~koordinat skifte

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x + \beta y \\ \gamma x + \delta y \end{bmatrix}$$

for passende $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, spiller her ingen rolle, men P ortogonal er viktig.

Får nå $q(x,y) = [xy]\, A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$= [xy] (P^{-1} D P) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$P^{-1} = P^t$ siden P er ortogonal!

$$= ([xy] P^t)\, D \left(P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)^t D \left(P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$$

$$= [x' \; y'] \, D \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2} \quad !$$

Eks: $q = 3x^2 + 2xy + 3y^2$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. For å finne P

må vi finne ortonormal basis av egenvektorer.

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

Løse: $\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = 4$ eller 2

Egenvektorer (a, b)

$\lambda = 4$: $a - b = 0$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$

$\lambda = 2$ $-a - b = 0$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$

ortonormal basis.

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$$

Sjekk (hvis man ikke stoler på dett)

$$f = 3x^2 + 2xy + 3y^2$$

$$= 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')\right)^2 + 2\frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')\frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') + 3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')\right)^2$$

$$= \frac{3}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) + x'^2 - y'^2 + \frac{3}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2)$$

$$= 4x'^2 + 2y'^2.$$

Så etter koordinat skift kan vi anta at

$$g = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma$$

der α, β, γ er resultatet av koordinat-skift på den lineære og konstante delen.

Siden A symmetrisk kan ikke $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (oppgave)

Hvis så $\lambda_2 = 0$ ($\Rightarrow \lambda_1 \neq 0$)

$$\frac{1}{\lambda_1} g = \left(x + \frac{\alpha}{2\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\lambda_1} y + \frac{\gamma}{\lambda_1} - \frac{\alpha^2}{4\lambda_1^2}\right)$$

etter koordinat skifte & translasjon

får vi $y = kx^2$. <u>parabel</u>

<u>med mindre</u> :

$\beta = 0 \Rightarrow$ 2 linjer (kunne vært dobbel

(degenerert tilfelle) eller tom eller ett pkt $(ax+b)^2 = 0$)

Hvis λ_1 & $\lambda_2 \neq 0$, full fører kvadratet i x & y & får vi de på formen

$$\lambda_1 \left(x + \frac{\alpha}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y + \frac{\beta}{2\lambda_2}\right)^2 - C$$

for en passende C.

Etter translasjon, $g = 0$

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = C$$

Som er hyperbel eller ellipse

(eller 2 linjer, ett pkt eller tom i "degenererte" tilfeller)

<u>NB!</u> Merk at typen (ellipse, hyperbell eller parabel) bestemmes av den symmetriske matrisen fra 2nd grads delen!

Ser av utledningen at

- ellipse hvis $\lambda_1 \lambda_2 > 0$

- hyperbel hvis $\lambda_1\lambda_2 < 0$
- parabel hvis $\lambda_1\lambda_2 = 0$

Men $\lambda_1\lambda_2 = \det A = ac - \frac{1}{4}b^2$. Kaller $D = b^2 - 4ac$ for diskriminanten & vi får

- ellipse hvis $D < 0$
- hyperbel hvis $D > 0$
- parabel hvis $D = 0$

Tangentlinjer til standardformene:

Ellipse: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

Implisitt derivasjon gir

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}y' = 0$$

Så i (x_0, y_0) på ellipsen $y' = -\frac{x_0}{y_0}\cdot\frac{b^2}{a^2}$

& tangentlinja er gitt ved

$$(y - y_0) = -\frac{x_0}{y_0}\frac{b^2}{a^2}(x - x_0)$$

Forenkling

$$a^2y_0y - a^2y_0^2 = -b^2x_0x + b^2x_0^2$$

$\Longrightarrow$ Husk (x_0, y_0) på ellipsen

$$a^2y_0y + b^2x\,x_0 = a^2y_0^2 + b^2x_0^2$$

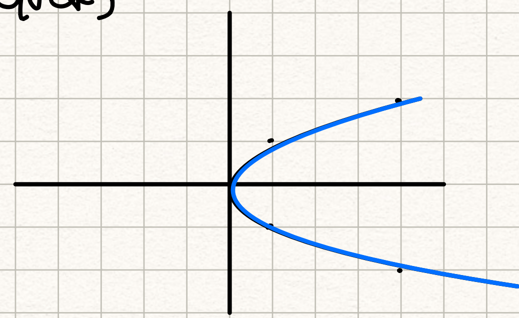
$\Longrightarrow$ dele med a^2b^2

$$\underline{\underline{\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1}}$$

På samme måte for hyperbelen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tangent linja i (x_0, y_0)

$$\underline{\underline{\frac{x_0}{a^2}x - \frac{y_0}{b^2}y = 1.}}$$

<u>Parabelen</u>: (slik som i heftet)



$$y^2 = 4cx$$

Implisitt derivasjon:

$$2yy' = 4c$$

I (x_0, y_0) på kurven: $(y - y_0) = \frac{4c}{2y_0}(x - x_0)$

$$\Rightarrow y_0 y - y_0^2 = 2c(x - x_0)$$

$$\Rightarrow y_0 y = 2cx - 2cx_0 + y_0^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y_0 y = 2c(x + x_0)}}$$

<u>Pol & polare:</u>

Gitt en ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ & vilkårlig pkt (x_0, y_0) i planet.

<u>Polaren</u> til (x_0, y_0) m.h.t. ellipsen er linja

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

Så hvis (x_0, y_0) på ellipsen er det tangentlinja

Gitt denne linja kalles (x_0, y_0) polen til linja.

Tilsvarende for hyperbelen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Polaren $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$

& parabelen $y^2 = 4cx$

Polaren $y_0 y = 2c(x + x_0)$

Sats: Et punkt P ligger på sin polare $\ell(P)$ m.h.t. et kjeglesnitt $\Longleftrightarrow$ P ligger på kjeglesnittet & $\ell(P)$ er tangent linja.

Bevis: (bare ellipsen)

$P = (x_0, y_0) \in \ell(P) \Longleftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$

$\Longleftrightarrow$ P på ellipsen. $\boxtimes$

Sats: $\ell = \ell(P)$ polaren til P m.h.t. et kjeglesnitt. La Q være et punkt i planet:

$$Q \in \ell(P) \Longleftrightarrow P \in \ell(Q)$$

Bevis:

Ellipse: $P = (x_0, y_0)$, $Q = (x_1, y_1)$

$\ell(P)$: $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ så

$Q \in \ell(P) \Longleftrightarrow \frac{x_0 x_1}{a^2} + \frac{y_0 y_1}{b^2} = 1$

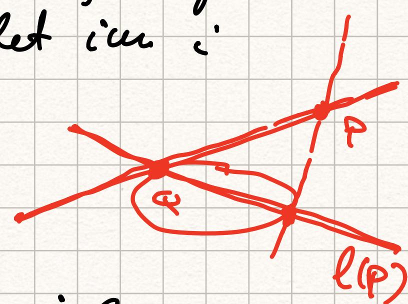
$\iff P \in l(Q)$.

Tilsvarende for alle andre $\boxtimes$

Polaren bestemmer tangentene til kjeglesnittet C som går gjennom P! Klart hvis P på kurven. Anta P ikke på kurven $\underset{\text{Sats}}{\Longrightarrow}$ $l(P)$ ikke tangerer kjeglesnittet.

$\Longrightarrow$ $l(P)$ skjærer C i 0 eller 2 punkter

(C gitt ved kvadratisk $g(x,y) = 0$, l gitt ved lineær ligning. Plugger det inn i g får vi $0, 1, 2$ løsninger!)



La $Q \in l(P) \cap C$

$\underset{\text{Sats}}{\Longrightarrow}$ $P \in l(Q)$ = tangenten til C i Q.

Omvendt: Hvis en tangent gjennom $Q \in C$ inneholder P $\Longrightarrow$ $P \in l(Q)$ $\Rightarrow$ $Q \in l(P)$ så $Q \in l(P) \cap C$.

<u>Konklusjon:</u> De tangentene (2 eller 0) til C som går gj. P er tangentene i punktene $l(P) \cap C$. Se figur 22 i heftet.

NAVNET BRENNPUNKT FORKLART i AVSNITT 5.7 Speilingsegenskaper til kjeglesnitt.