Polaren til generell kvadratisk kurve

$$g(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$ kvadratisk kurve

Har vist: Hvis C er ikke-degenerert

må den være enten ellipse, hyperbel eller parabel. Bestemt av $b^2 - 4ac$.

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}d \\ \frac{1}{2}b & c & \frac{1}{2}e \\ \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}e & f \end{bmatrix}$$

3×3 symmetrisk matrise.

Påstand: $$[g(x,y)] = [x\ y\ 1] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave: tangentlinjen til et pkt

$(x_0, y_0) \in C$ er gitt ved

$$[x\ y\ 1] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

For vilkårlig punkt $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

definerer Polaren til P, $\ell(P)$:

$$\left\{ (x,y) \;\middle|\; [x\ y\ 1]\, A \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

1) $P \in \ell(P) \iff P \in C$ ~~&~~ $\ell(P)$ tangentlinjen til C i P.

2) $\underline{P \in \ell(Q) \iff Q \in \ell(P)}$

La $Q = (x_1, y_1)$

$\ell(P)$ $\quad [x \ y \ 1] \, \underline{A} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$Q \in \ell(P) \iff \underbrace{[x_1 \ y_1 \ 1] \, A \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{*} = 0$$

$*$ er 1×1, betyr at $* = *^t$

$$* = 0 \iff \left([x_1 \ y_1 \ 1] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \underline{1} \end{bmatrix} \right)^t = 0$$

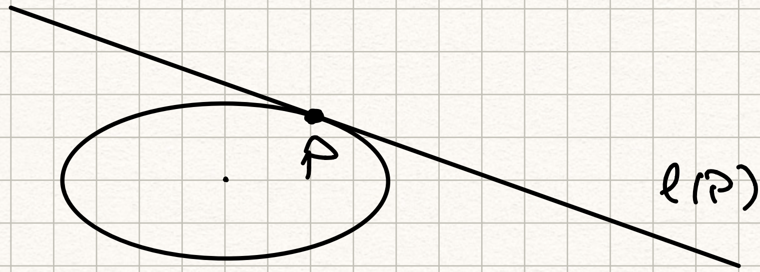
$$\iff [x_0 \ \underline{y_0} \ 1] \, A \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$A = A^t \ !!$$

$\iff P \in \ell(Q)$! $\square$

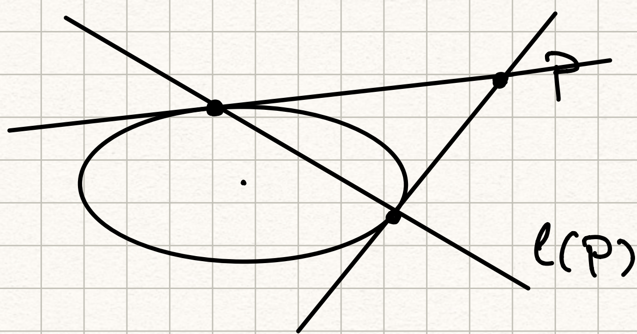
Følger med samme argumenter som i spesial tilfellene at vi konstruere $\ell(P)$ slik. for alle kjeglesnitt C.

1)



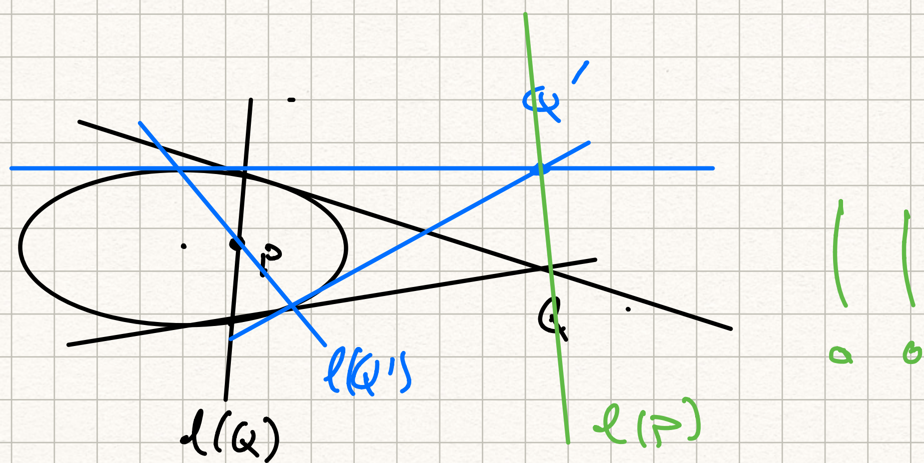
$P \in \mathcal{C}$, $\ell(P)$ tangentlinja

2)



P utenfor ellipsen, $\ell(P)$ gjennom punktene der en linje gj. P tangerer!

3)

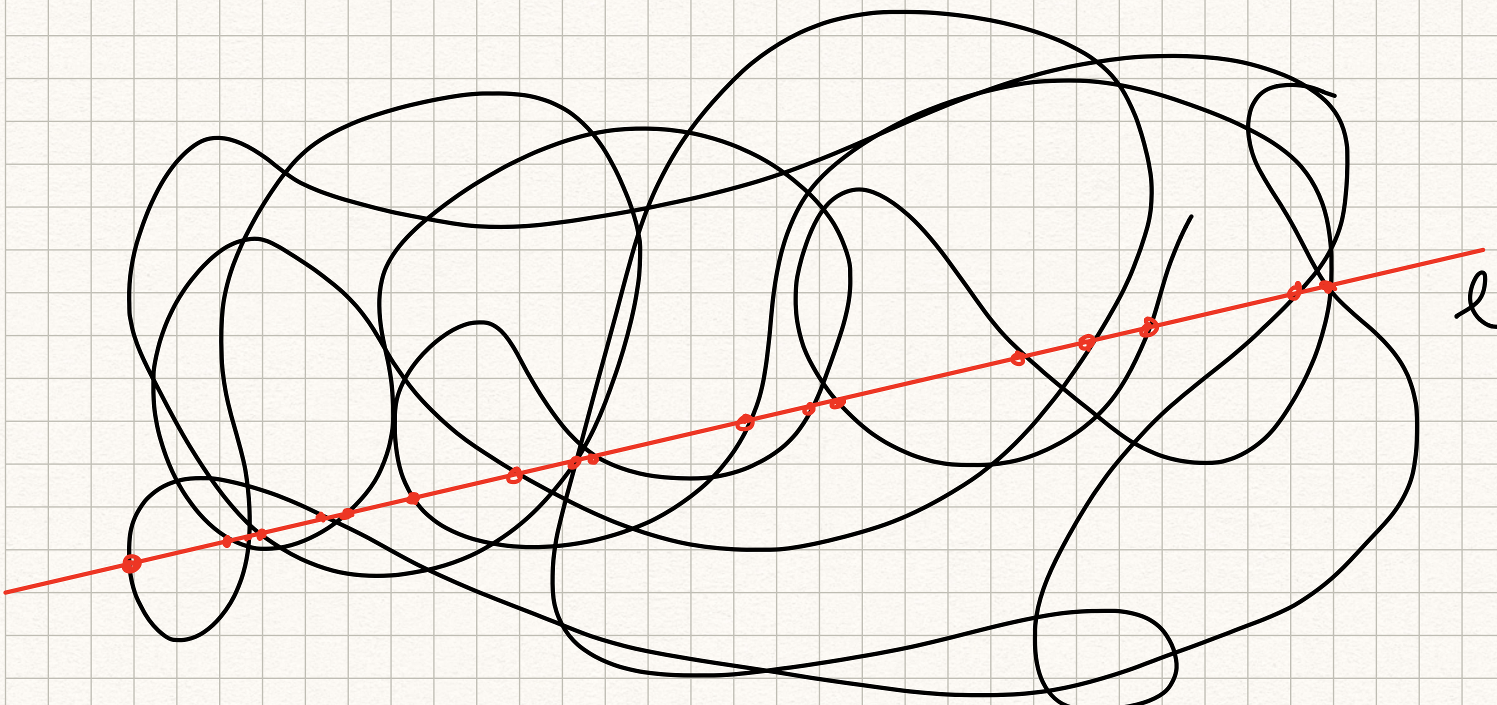


$P \in \ell(Q) \iff Q \in \ell(P)$

$\Rightarrow P \in \ell(Q) \cap \ell(Q') \Rightarrow Q \,\&\, Q' \in \ell(P)$

Invarianten graden til en kurve

Kurver forstå



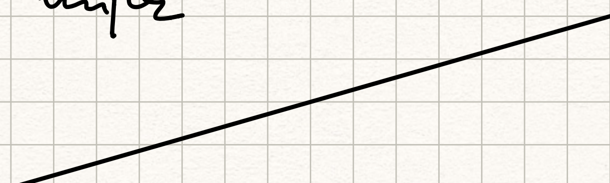
19 punkter i $\ell \cap C$

Invariant: graden til C er maks antall snitt mellom en linje & C (ikke helt riktig)

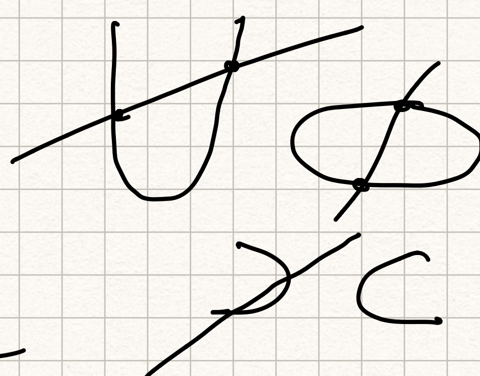
I eks grad ≥ 19, d = grad

Ikke kompliserte kurver, lav grad.

$d = 1$: linjer

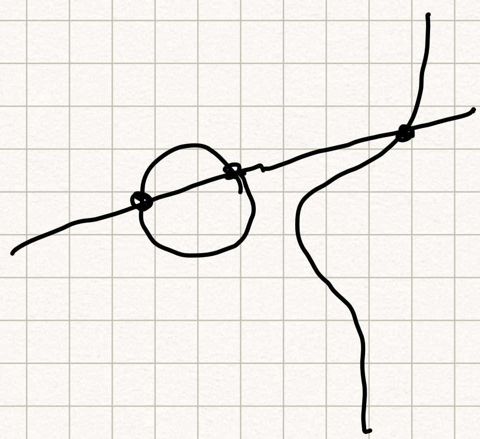


$d = 2$: Kjeglesnitt.



Spesielt: Sheng med symm. matriser

$d = 3$: Elliptiske kurver



Spesielt

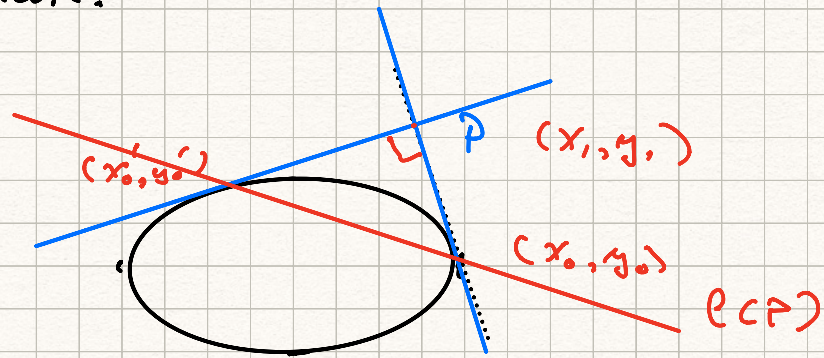
En sekant vil snitte i et tredjepkt!

2 punkter gir et nytt pkt!

Med litt modifikasjon ⇝ elliptisk har en sum, addisjon & blir en gruppe!.

- Fermats teorem bevist ved hjelp av elliptiske kurver.
- Kryptografi - - -

Anvendelse: Det geometriske stedet av punkter P slik at tangentene fra P til en gitt ellipse står normalt på hverandre.



Når står to linjer gitt ved $\alpha x + \beta y = \gamma$ & $\alpha' x + \beta' y = \gamma'$ normalt på hverandre?

Først anta begge β & $\beta' \neq 0$.

$y = \frac{1}{\beta}(\gamma - \alpha x)$ så linja er mengden av

$$(x, \tfrac{1}{\beta}(\gamma - \alpha x)) = (0, \tfrac{\gamma}{\beta}) + x(1, -\tfrac{\alpha}{\beta})$$

Så en retningsvektor er $(\beta, -\alpha)$. Tilsvarende $(\beta', -\alpha')$ & de er ortogonale hvis & bare hvis

$$\underline{\underline{\beta\beta' + \alpha\alpha' = 0}}$$

Hvis så $\beta = 0$ er linja $\parallel$ med y-aksen & $\beta\beta' + \alpha\alpha' = 0 \Rightarrow \alpha' = 0$ siden $\alpha \neq 0$ dvs at l' må være $\parallel$ med x-aksen, så kravet stemmer her også. $\blacksquare$

Hvis ellipsen er $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 : C$

Vet vi at tangent linjen i (x_0, y_0)

er $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$

La de to punktene linjene tangerer i være (x_0, y_0) & (x_0', y_0')

Kravet er da $\boxed{\frac{x_0 x_0'}{a^4} + \frac{y_0 y_0'}{b^4} = 0}$ $(*)$

La $(x_1, y_1) = P$ i det geo. stedet.

Vet nå at polaren til P m.h.t ellipsen skjærer ellipsen i (x_0, y_0) & (x_0', y_0')

Polaren er

$$\frac{x_1}{a^2} x + \frac{y_1}{b^2} y = 1 \quad : \ell$$

Så $(x_0\ y_0)$ & (x_0', y_0') er $\ell \cap C$

Se på $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} \cdot \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} \cdot \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{y_1^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} \frac{y_1^2}{b^2} + \left(1 - \frac{x_1 x}{a^2}\right)^2 = \frac{y_1^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{y_1^2}{b^2 a^2} \cdot x^2 + 1 - \frac{2x_1}{a^2} \cdot x + \frac{x_1^2}{a^4} x^2 - \frac{y_1^2}{b^2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y_1^2}{b^2 a^2} + \frac{x_1^2}{a^4}\right) x^2 - \left(\frac{2x_1}{a^2}\right) x + \left(1 - \frac{y_1^2}{b^2}\right) = 0$$

2nd grads likning i x, må ha x_0 & x_0' som røtter.

For kravet (*) trenger bare å vite $x_0 x_0'$ & $y_0 y_0'$.

Husk $\quad x^2 + ax + \underline{b} = (x - x_0)(x - x_0') = x^2 - (x_0 + x_0')x + \underline{x_0 x_0'}$

Får i vårt tilfelle

$$x_0 \cdot x_0' = \frac{1 - \frac{y_1^2}{b^2}}{\frac{y_1^2}{b^2 a^2} + \frac{x_1^2}{a^4}} = \frac{a^2 - \frac{a^2 y_1^2}{b^2}}{\frac{y_1^2}{b^2} + \frac{x_1^2}{a^2}} \qquad P = (x_1, y_1)$$

Tilsvarende finner ved å lage kvadratisk ligning i y at

$$y_0 \cdot y_0' = \frac{b^2 - \frac{b^2 x_1^2}{a^2}}{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}}$$

Så (*) blir nå et uttrykk i x_1, y_1 nemlig

$$\frac{1}{a^4} \cdot \frac{a^2 - \frac{a^2 y_1^2}{b^2}}{\frac{y_1^2}{b^2} + \frac{x_1^2}{a^2}} + \frac{1}{b^4} \cdot \frac{b^2 - \frac{b^2 x_1^2}{a^2}}{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{a^4}\left(a^2 - \frac{a^2 y_1^2}{b^2}\right) + \frac{1}{b^4}\left(b^2 - \frac{b^2 x_1^2}{a^2}\right) = 0$$

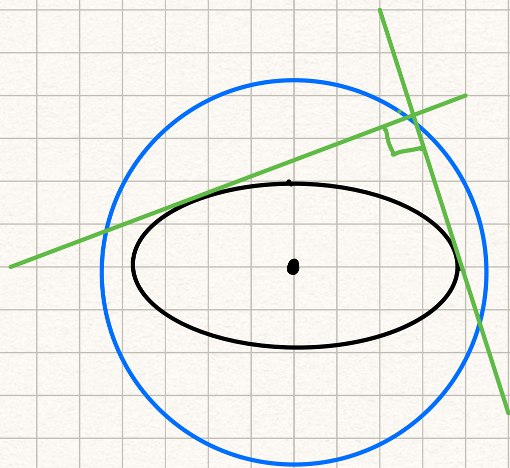
$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{a^2} - \frac{y_1^2}{a^2 b^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{x_1^2}{a^2 b^2} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{x_1^2 + y_1^2 = a^2 + b^2} \qquad P = (x_1, y_1)$$

En sirkel med sentrum i sentrum for

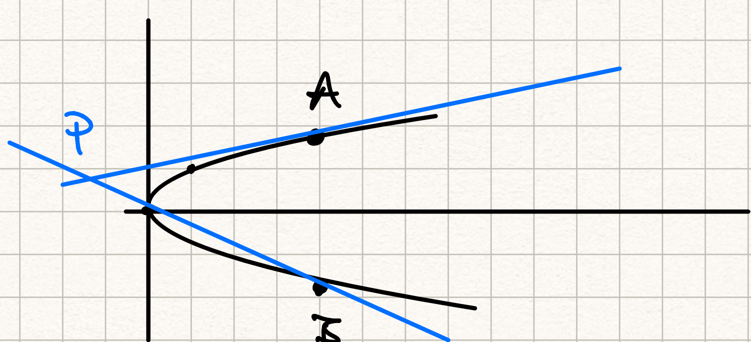
ellipsen & radius = a^2+b^2

Største sirkelen



Oppgave 5.

A pkt på $C: x=y^2$ & B speilbildet over x-aksen. La ℓ være tangentlinja til C i A & ℓ' linja gjennom B og O. $P := \ell \cap \ell'$
Finn geo. stedet for P når A løper på parabelen.



$A = (a, b)$, $a = b^2$

$B = (a, -b)$

$\ell': bx + ay = 0$

ℓ : tangentlinja

Husk: $y^2 = 4cx$, tangentlinja i (x_0, y_0) : $y_0 y = 2c(x+x_0)$

Her er $c = \frac{1}{4}$: $\ell: by = \frac{1}{2}(x+a)$ eller

$$-\frac{1}{2}x + by = \frac{1}{2}a$$

$$P: \left[\begin{array}{cc|c} b & a & 0 \\ -\frac{1}{2} & b & \frac{a}{2} \end{array}\right], \quad x = \frac{-\frac{1}{2}a^2}{b^2+\frac{1}{2}a} \quad y = \frac{\frac{1}{2}ba}{b^2+\frac{1}{2}a}$$

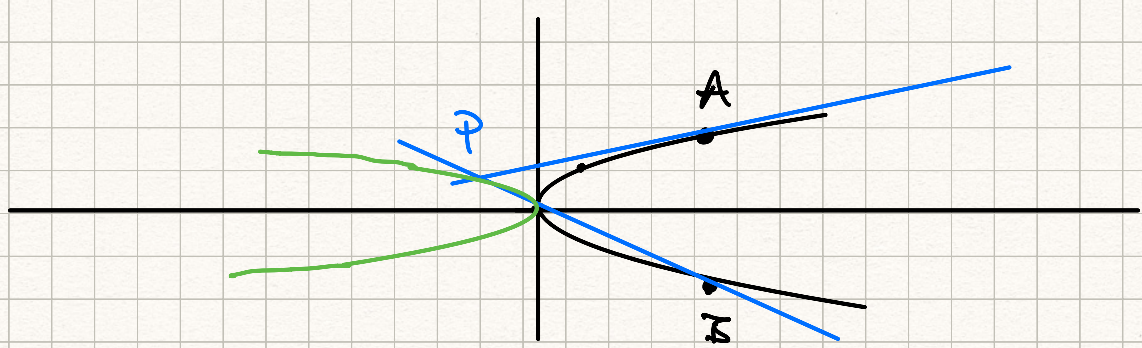
$$\det = b^2 + \frac{1}{2}a$$

& vi vet bare at $a = b^2$,

$$x = \frac{-\frac{1}{2}b^4}{\frac{3}{2}b^2} = -\frac{b^2}{3}, \quad y = \frac{\frac{1}{2}b^3}{\frac{3}{2}b^2} = \frac{b}{3}$$

$$= -9/3$$

Så $b = 3y$, $\underline{\underline{x = -3y^2}}$ en parabel



Leder til nye spm.

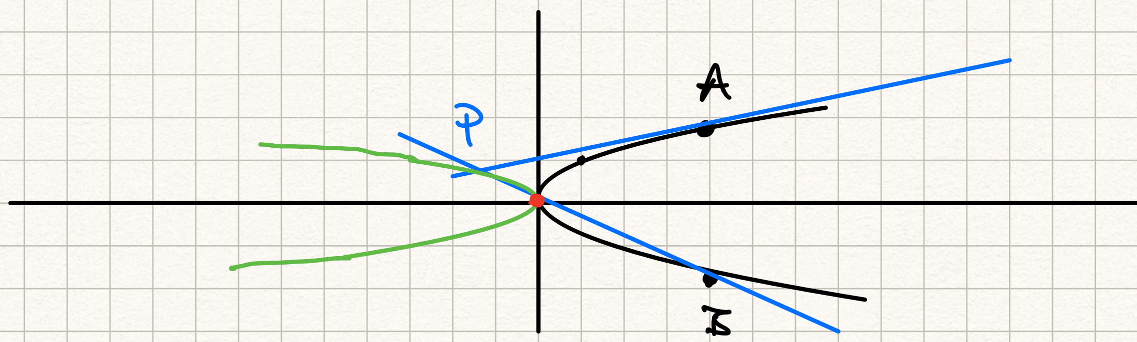
1) - Symmetrien i geo. stedet om x-aksen. Hvorfor?

2) - Hva er den spesielle konfigurasjon $P = (0,0)$?

Gitt P på $x + 3y^2 = 0$, har $A = (a,b)$

$$= (-3x, 3y)$$

Symmetrien er symmetrien i det opspr. parabel



Punktet $P = (0,0)$ svarer til $A = (0,0)$
& dermed $B = (0,0)$ & at
tangent linjen i A = y-aksen
Men ℓ' har egentlig ikke mening ?!
"linjen gjennom B og $O := B$.
Men husk intro. til tangenter. sekanter,
hold et pkt fast, O, & la andre, B,
bevege seg mot O. Grensen er tangenten
i O !
Tilsier at $\ell = \ell'$ i $(0,0)$, så snittpkt ?
har ingen mening ?! . . . . .