Projektiv geometri (planet)

Mange innfalls vinkler:

- En geometri "uten parallelle linjer"
    - ikke-Euklidsk geometri
- En kompaktifisering av planet, gjør geometrien enklere å studere. (Alle kjeglesnitt like f.eks.)
- Det "riktige" stedet å se på nullpunkter av polynomer - "riktige" koordinater.

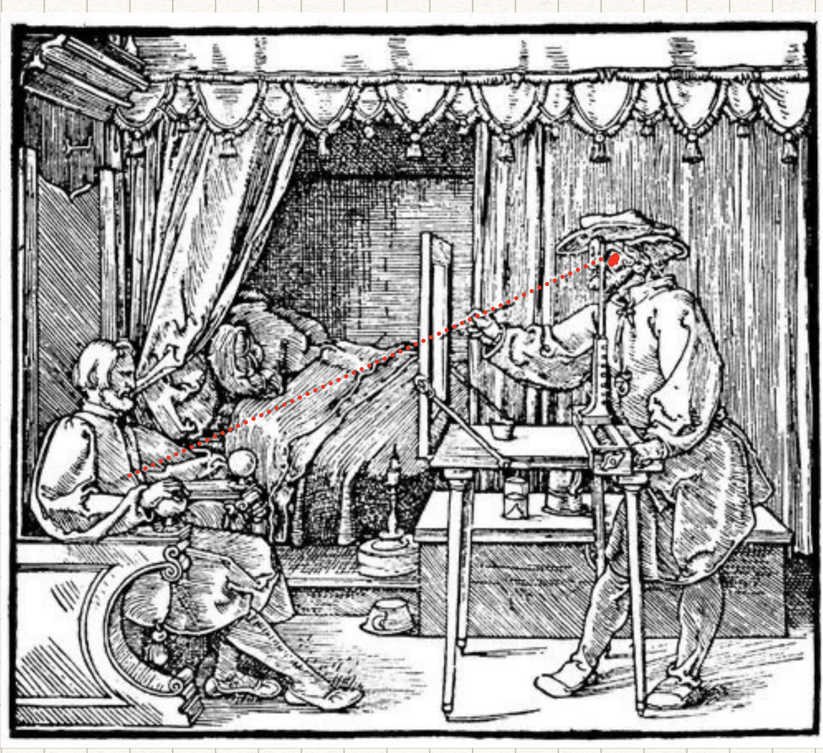
Historiske innfall:

Renessansen; representere 3-dim troverdig på et 2-dim lerret.

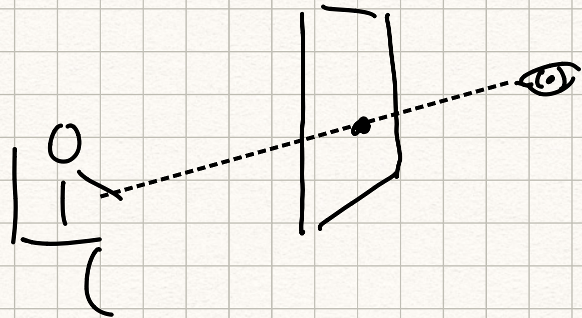
Albrecht Dürer (1532)

—

tegne på glass plate



Merk "holde hode stille" greia



Projisere fra et punkt (øyet til maleren) på lerretet.

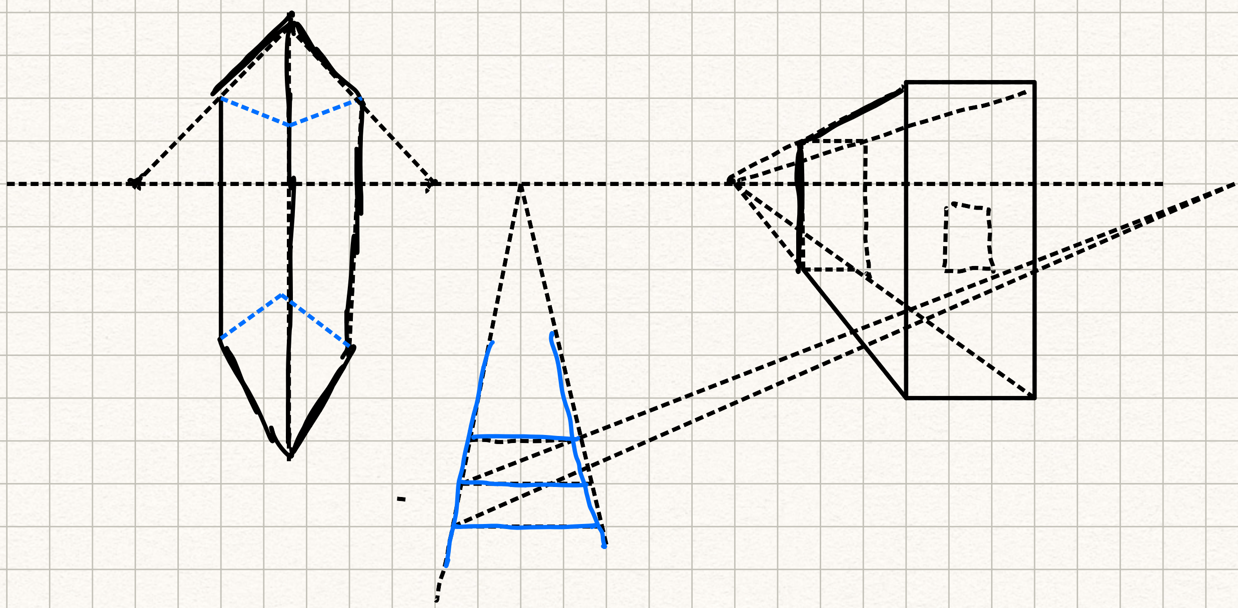
Forutsetter at objektet er tilstede.

Motivene vi kjenner er fra Bibelen, mytologi, antikkens Athen, osv -- $\Rightarrow$ trenger de geometriske konstruksjonene, teoremene.

Noen:

- <u>linjer blir projisert på linjer</u>, men vinkler & avstand er endret.

- Det fins en horisont linje, bestemt av posisjonen til øyet,
- Linjer som ikke er parallelle eller $\perp$ på hori - linja (H) vil treffe horisont linja & så "forsvinne".
- Parallelle linjer som ikke er $\parallel$ eller $\perp$ til H <u>møtes</u> i et felles forsvinnings punkt.

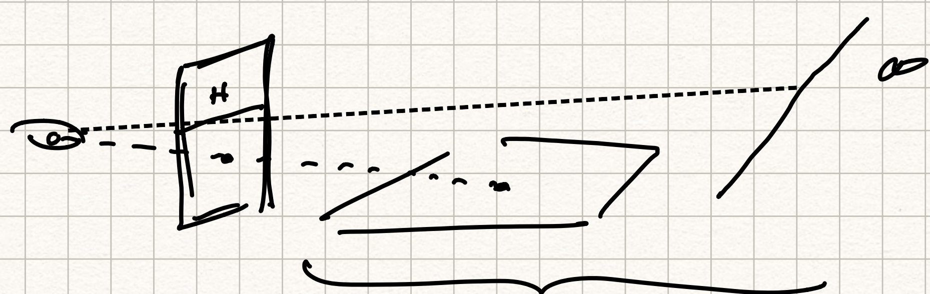


Dessverre ikke emne i kurset.

Navn:
- Gérard Desargues (1591–1661)
- Gaspard Monge (1746–1818)
- Jean-Victor Poncelet (1788–1867)

Desargues:

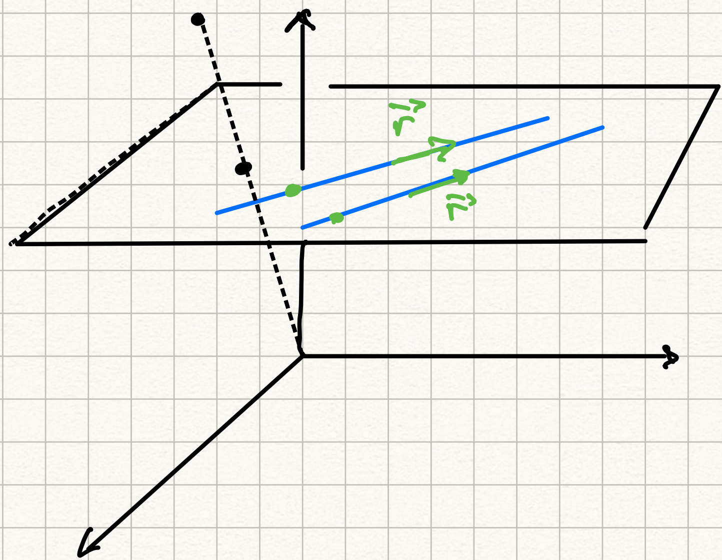
proj. av plan i 3-rommet på lerretet



Plane ∪ line at ∞

Ønske å studere hva i geometrien er invariant via perspektiv projeksjonen.
Bestemte konfigurasjoner av punkter & linjer, men også snakke på kjeglesnitt

$\Rightarrow$ idé: Plasser planet $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^2 \cup$ "linje ∞" der parallelle linjer i planet møtes i ∞.



Tenker oss planet lagt til $z=1$

så $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \xleftrightarrow{1-1} (x,y,1) \in \mathbb{R}^3$

Men via projeksjon fra 0 kan vi også tenke på $z=1$ som ekv. klasser på $\{(x,y,z) \mid z \neq 0\}$

$(x,y,z) \sim (x',y',z')$ hvis på samme linje gj. origo.

$$[(x,y,z)] \longrightarrow \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right)$$

1-1 korrespondanse

ha $p + t\vec{r}$ & $q + t\vec{r}$ parameter form for parallelle linjer i planet $\vec{r} = (r_1, r_2)$, $p = (p_1, p_2)$

I $z=1$ svarer det til

$$(p_1 + tr_1, p_2 + tr_2, 1)$$

Hva skjer hvis $t \to \infty$, tolkning:

$$(p_1 + tr_1, p_2 + tr_2, 1) = \left[\left(\frac{p_1}{t} + r_1, \frac{p_2}{t} + r_2, \frac{1}{t}\right)\right]$$

$$\xrightarrow[t \to \infty]{} [(r_1, r_2, 0)]$$ som foreløpig ikke har mening, men merk

$$q + t\vec{r} \xrightarrow[t\to\infty]{} [(r_1, r_2, 0)] \quad \text{også}$$

Så hvis vi kan gi mening et sted der parallelle linjer treffes.

~

Definisjon: $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = \{ \text{linjer gj. } 0 \text{ i } \mathbb{R}^3 \}$

Skal gi den mere struktur etter hvert.

Ekvivalent: Definer $\sim$ på $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ved
$p \sim q$ hvis $\exists \lambda \neq 0$ i $\mathbb{R}$ s.a. $p = \lambda q$.
Ekv. relasjon &

$$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \sim = \{\text{ekv. klasser for } \sim\}$$

Siden en linje gj. 0 snitter enhetsfæren S^2 i 2 antipodale punkter har vi også

$$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = S^2 / \sim$$

der $p \sim p$ & $p \sim -p$.

Homogene koordinater

Skriver $(x : y : z)$ for $[(x, y, z)]$ & husker at $(x : y : z) = (\lambda x : \lambda y : \lambda z)$ hvis $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

En <u>linje</u> i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ er en mengde på formen $\{(x_0 : x_1 : x_2) \mid ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0\}$ for $a, b, c \in \mathbb{R}$, ikke alle $= 0$.

Se på f.eks. $x_2 = 0$ $= \{(x_0 : x_1 : 0)\}$
& husk $(x_0 : x_1 : 0) = (\lambda x_0 : \lambda x_1 : 0)$ for alle $\lambda \neq 0$.

Definer $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} / \sim$. En linje i $\mathbb{P}^2$ er $\simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$

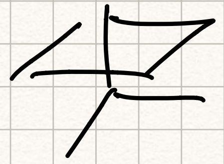
To distinkte linjer i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ snitter alltid i <u>ett</u> punkt.

Må løse
$$ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$$
$$a'x_0 + b'x_1 + c'x_2 = 0$$
2 lin. likninger i 3 variabler har en <u>ikke</u> triviell løsning! Svarer til en linje gj. origo i $\mathbb{R}^3$ $=$ pkt i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

I praksis $(a, b, c) \times (a', b', c')$ en løsning!
(normal på begge plan)
$$(bc' - b'c : -(ac' - a'c) : ab' - a'b)$$

<u>Eks:</u> $3x_0 + 2x_1 = 0$ & $x_0 + x_1 + x_2 = 0$
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \sim \underline{\underline{(2 : -3 : 1)}}$$

Sammenheng med $\mathbb{R}^2 \cup$ linje i ∞.

 $\rightsquigarrow$ $U_i := \{(x_0:x_1:x_2) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \mid x_i \neq 0\}$

for $i = 0, 1, 2$.

$(0:0:0)$ fins ikke i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ så U_i ene dekker $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, dvs $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = U_0 \cup U_1 \cup U_2$.

Se på f.eks. U_2. Påstår

$$\varphi : U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

gitt ved $\varphi(x_0:x_1:x_2) = \left(\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2}\right)$

er en bijeksjon. Veldefinert siden $x_2 \neq 0$ i U_2.

& $(\lambda x_0 : \lambda x_1 : \lambda x_2) \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2}\right)$.

Bijektiv fordi fins φ^{-1}, nemlig

$$\varphi^{-1}(x, y) = (x : y : 1)$$

Sjekk: $\varphi \circ \varphi^{-1}(x, y) = \varphi(x : y : 1) = (x, y)$

$$\varphi^{-1} \circ \varphi(x_0 : x_1 : x_2) = \varphi^{-1}\left(\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2}\right)$$

$$= \left(\frac{x_0}{x_2} : \frac{x_1}{x_2} : 1\right) = (x_0 : x_1 : x_2)$$

Ok!

Samme argument for U_0, U_1 ~~osv~~ på alle $U_i \cong \mathbb{R}^2$. Lar U_2 være standard embedding av $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

Hva er resten?

<u>Linja $x_2 = 0$</u> ! så $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\mathbb{P}^1}_{\text{en projektiv linje}}$

På samme måte (men enklere) $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \underbrace{\{\infty\}}_{\text{ett pkt.}}$

La $l: ax + by + c = 0$ en linje i $\mathbb{R}^2$.
På står det fins entydig projektiv linje L i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ s.a. $L \cap \mathbb{R}^2 = l$. Nemlig

$$L: \quad a x_0 + b x_1 + c x_2 = 0$$

$$L \cap \mathbb{R}^2 = \{ (x_0 : x_1 : x_2) \mid a x_0 + b x_1 + c x_2 = 0,\ x_2 \neq 0 \}$$

$$= \{ (x_0 : x_1 : x_2) \mid a \frac{x_0}{x_2} + b \frac{x_1}{x_2} + c = 0,\ x_2 \neq 0$$

via φ er dette $\{ (x, y) \mid ax + by + c = 0 \}$