La $\ell: ax+by+c=0$ en linje i $\mathbb{R}^2$.
På står det fins entydig projektiv linje L i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ s.a. $L \cap \mathbb{R}^2 = \ell$. Nemlig

$$L: \quad ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$$

$$L \cap \mathbb{R}^2 = \{ (x_0 : x_1 : x_2) \mid ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0,\ x_2 \neq 0 \}$$

$$= \{ (x_0 : x_1 : x_2) \mid a\frac{x_0}{x_2} + b\frac{x_1}{x_2} + c = 0,\ x_2 \neq 0$$

via φ er dette $\{ (x,y) \mid ax + by + c = 0 \}$

Husk: $\ell: ax+by+c=0$ & $\ell': a'x+b'y+c'=0$

er parallelle $\iff a'b = ab'$

$\iff \exists \lambda \neq 0 : (a', b') = \lambda (a, b)$

dvs $\ell' : \lambda a x + \lambda b y + c' = 0$

som gir samme linje som $ax + by + \frac{c'}{\lambda} = 0$

Så etter nye navn antar at for $c \neq c'$

$\ell : ax+by+c=0$ & $\ell' = ax+by+c'=0$

Utvides i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ til

$L: ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$ & $L' : ax_0 + bx_1 + c'x_2 = 0$

Snitt punktet : $\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c' \end{bmatrix} \sim (b(c'-c) : a(c-c') : 0)$

$= (b : -a : 0)$, så de snitter i $\ell_\infty : x_2 = 0$

Hvis $b \neq 0$ er $-a/b$ stigningstallet til linjene

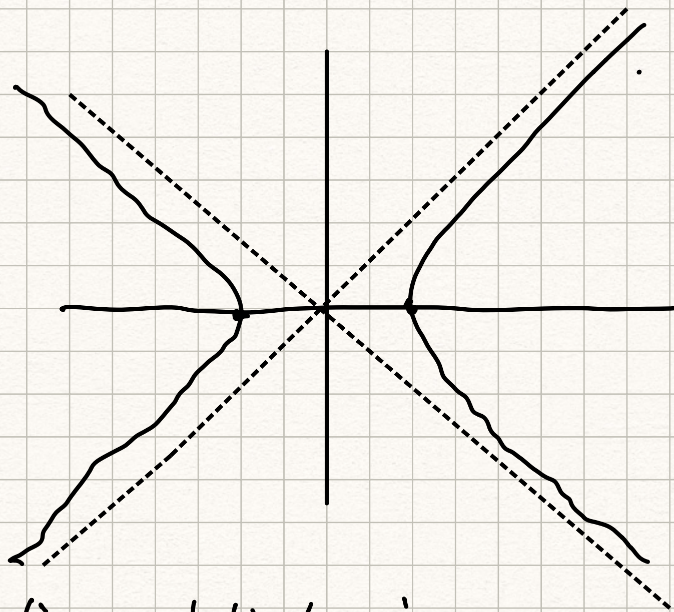
Hvis $b=0$, $x = -c/a$ stigningstallet $= \infty$

& $(b : -a : 0) = (1 : -a/b : 0)$ $b \neq 0$

$= (0 : 1 : 0)$ (∞) $b = 0$.

Eks: asymptoter til hyperbelen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

er $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ & $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$



hyperbelen nærmer seg asymptoten i ∞.

Projektive tillukningen av $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ er $\frac{x_0}{a} - \frac{x_1}{b}$ som snitter $\ell_\infty : x_2 = 0$ i $(a : b : 0)$. Tilsvarende $\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ treffer ℓ_∞ i $(a : -b : 0)$

Merk at $C: \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{x_1^2}{b^2} - x_2^2 = 0$ i $\mathbb{P}^2$ restrikter til hyberbelen i $\mathbb{R}^2$. & $C \cap \ell_\infty$ ~~er~~ gitt ved $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{x_1^2}{b^2} = 0$

$$= \left(\frac{x_0}{a} - \frac{x_1}{b}\right)\left(\frac{x_0}{a} + \frac{x_1}{b}\right)$$ dvs $x_1 = \frac{b}{a} x_0$ eller $x_1 = -\frac{b}{a} x_0$. Gir 2 punkter i $\mathbb{P}^2$: $(a : b : 0)$ & $(a : -b : 0)$.

Så hyperbelen snitter asymptotene i ∞ & lukkes til en s.hengende kurve.

Aksiomatisk innføring:

Incidens geometri av plan:
Et par av mengder $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ der
$\mathcal{P}$ skal være punkter & $\mathcal{L}$ linjer. & slik at $l \in \mathcal{L}$ er en delmengde $l \subseteq \mathcal{P}$.
Krever $|\mathcal{L}| \geq 2$ & alle $l \in \mathcal{L}$ har $|l| \geq 3$.

(i) $P \neq Q$ i $\mathcal{P}$, da fins entydig l med $P, Q \in l$.

Affin: (ii) Gitt $l \in \mathcal{L}$ og $P \in \mathcal{P}$ med $P \notin l$, ~~det~~ fins entydig $l' \in \mathcal{L}$ s.a. $l \cap l' = \emptyset$.

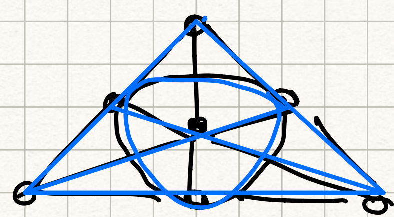
(parallelle linjer)

Projektiv: (ii) Hvis l & l' er i $\mathcal{L}$ fins entydig $P \in \mathcal{P}$ s.a. $P = l \cap l'$!

(+ betingelser på at det fins konfigurasjoner av punkter uten linje gj. alle)

Kan dermed lage endelige affine & projektive plan

Minste projektive plan, Fano planet



7 punkter &

7 linjer

Hver linje har 3 punkter.

Punktene er homogene koordinater over

$\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ $\quad 0 \cdot 1 = 0, \; 1 \cdot 1 = 1 \quad \quad 1+1=0$

$$\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}_2} = \{ (1:0:0), (0:1:0), (0:0:1), (1:1:0), (1:0:1), (0:1:1), (1:1:1) \}$$

Linjene:

$$\{ x_0 = 0, \; x_1 = 0, \; x_2 = 0, \; x_0 + x_1 = 0, \; x_0 + x_2 = 0, \; x_1 + x_2 = 0, \; x_1 + x_2 + x_2 = 0 \}$$

Merk punkter $\longleftrightarrow$ linjer

$$(a:b:c) \longleftrightarrow a x_0 + b x_1 + c x_2 = 0$$

for eks: $x_1 + x_2 = 0 = \{ (1:0:0), (0:1:1), (1:1:1) \}$

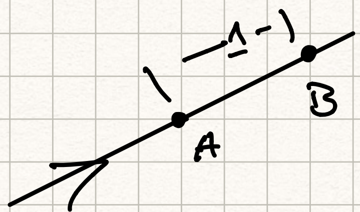
Menelaos & Ceva:

Tilbake i Euklidske plan, med avstand

Notasjon: linjestykket mellom A & B : AB

linjen gj. A&B, l_{AB}

Lengde med fortegn: Gitt en linje l, gi den en retning (orientert linje)



$$\overline{AB} = \begin{cases} d(A,B) & \text{hvis A før B i retningen} \\ 0 & \text{hvis } A = B \\ -d(A,B) & \text{hvis B før A i retningen} \end{cases}$$

$d(A,B) = 1$

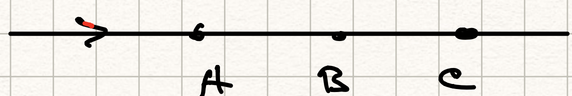
$\Downarrow$

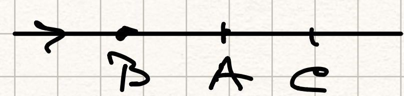
$\overline{AB} = 1$, $\overline{BA} = -1$.

For 3 punkter på l, A, B, C

$$\boxed{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0} \qquad (*)$$

uavhengig av orientering & rekkefølge & likheter.





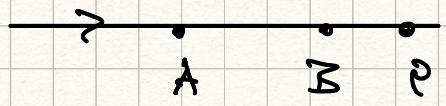
$d(A,B) + d(B,C) - d(A,C) = 0$ $\qquad$ $-d(A,B) + d(B,C) - d(A,C) = 0$

osv.

Delings forhold: A, B, P på en linje

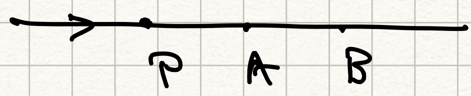
Sier at P deler AB i forholdet

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$$

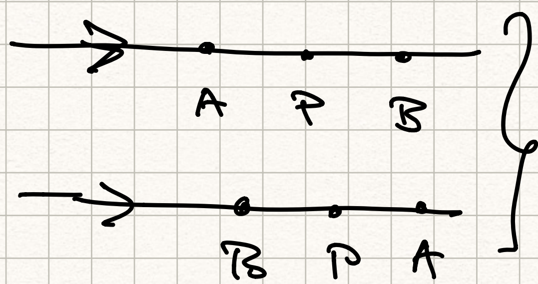


$\overline{AP} > 0$ $\qquad$ $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}} < 0$

$\overline{PB} < 0$



$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} < 0$$



$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} > 0$$

Sats: P på linja gj. A & B er entydig bestemt av $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$.

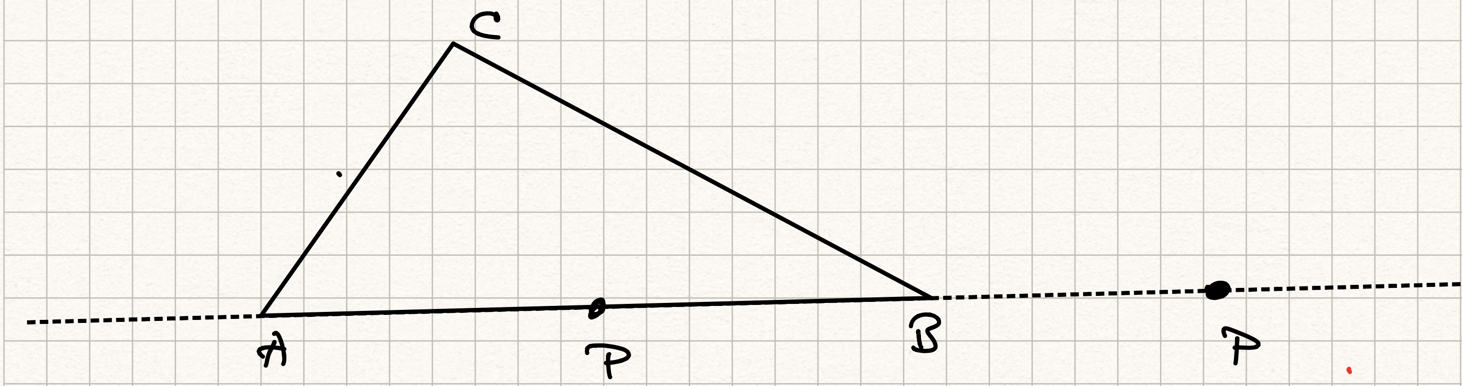
Bevis: P, Q på linja med

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} \Longrightarrow \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} + \underbrace{\frac{\overline{PB}}{\overline{PB}}}_{=1} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} + \underbrace{\frac{\overline{QB}}{\overline{QB}}}_{=1}$$

$$(*) \Rightarrow \overline{AP} + \overline{PB} = -\overline{BA} = \overline{AB}$$

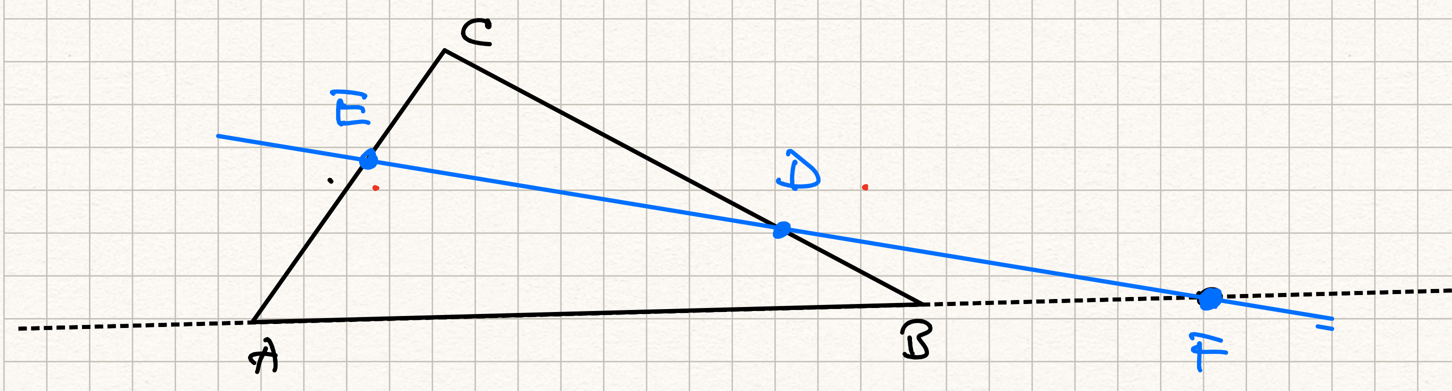
så $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{PB}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{QB}} \Longrightarrow \overline{PB} = \overline{QB} \Rightarrow P = Q$

I trekanten $\triangle ABC$ sier vi at et pkt på linja gj. AB som ikke er et hjørne er et <u>Menelaos punkt</u> til $\triangle ABC$ for AB.



<u>Menelaos teorem:</u> Tre Menelaos punkter D, E, F for sidene BC, CA & AB i $\triangle ABC$ er <u>kolineære</u> $\Longleftrightarrow$

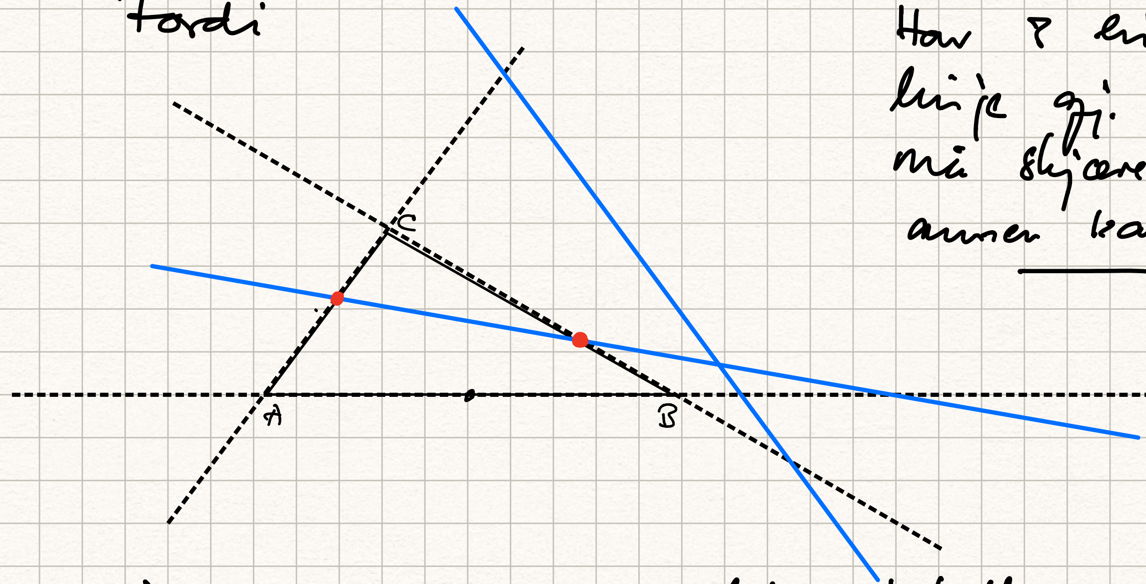
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -1$$



<u>Bevis:</u> $\Longrightarrow$ Anta E, D & F på en linje

Påstår enten 1 eller alle 3 ligger utenfor trekanten.

Fordi



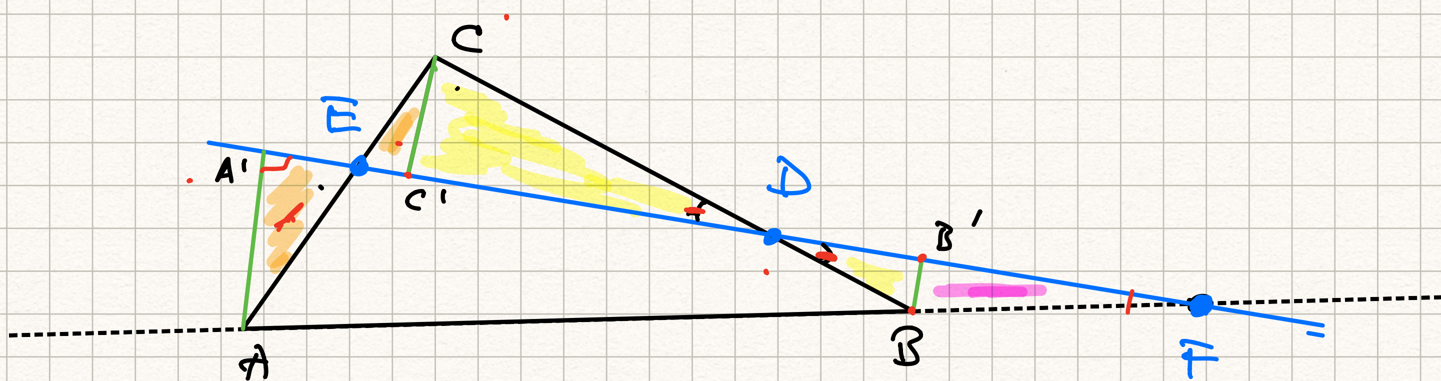
Har 3 linjer. En linje gj. trekanten må skjære også en annen kant!

$\Longrightarrow$ 1 eller 3 av delingsforholdene er negative

$\Longrightarrow$ Produktet er negativ.

Så kan jobbe med avstand uten fortegn.

Sett $AB := d(A, B)$



Trekk høydene fra hjørnene ned på linja gj. D, E & F & kall A', B', C'

$\Delta BB'D$ & $\Delta CC'D$ formlike

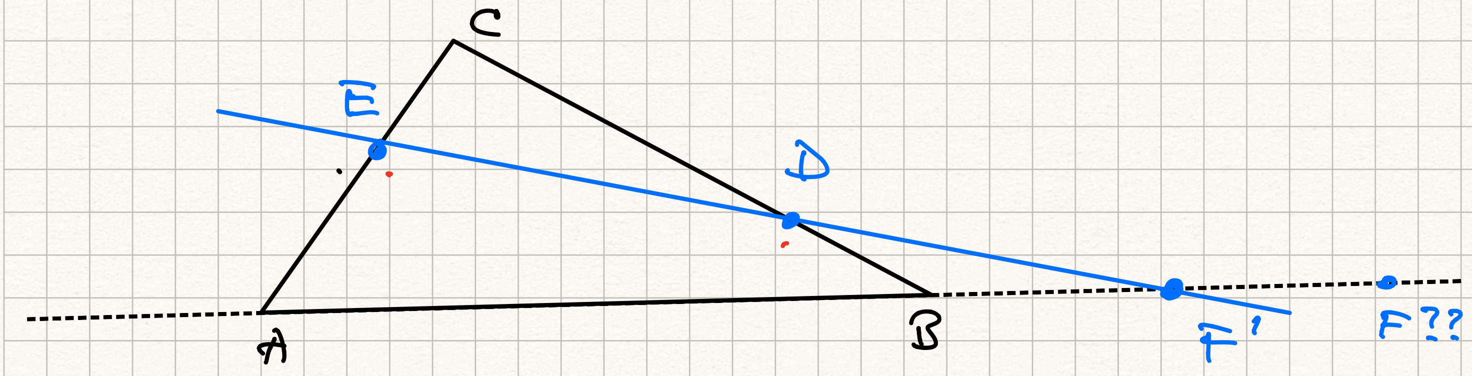
$\Delta AA'E$ & $\Delta CC'E$ —"—

$\Delta AA'F$ & $\Delta BB'F$ —"—

$$\Longrightarrow \quad \frac{BD}{DC} = \frac{BB'}{CC'}, \quad \frac{CE}{EA} = \frac{CC'}{AA'}, \quad \frac{AF}{FB} = \frac{AA'}{BB'}$$

Sett inn i produktet & får 1.

Andre veien $\Leftarrow$: Anta produkt $= -1$ gjelder.



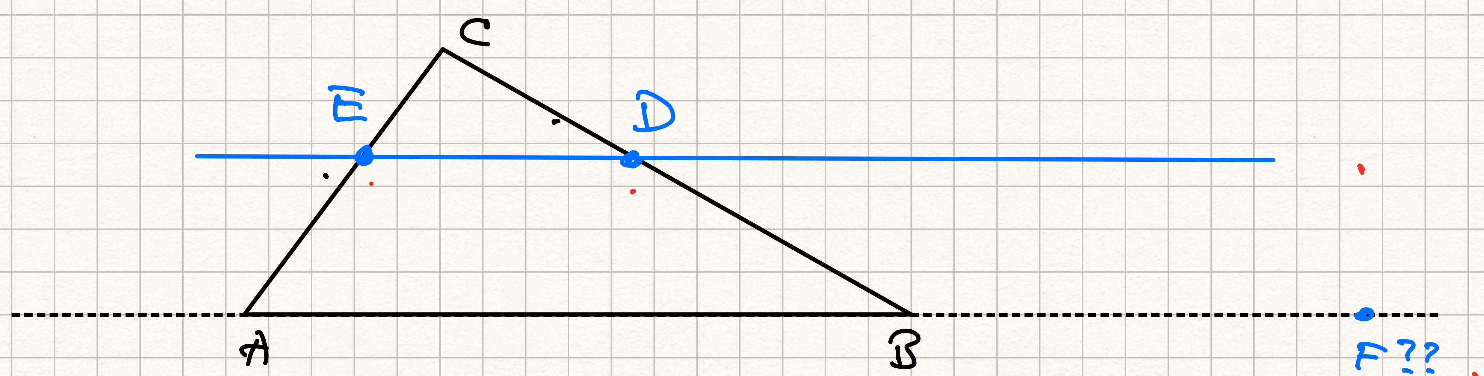
La F' være snittet av linja gj. DE & AB

Må vise $F = F'$

Første delen $\Rightarrow$ $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \dfrac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} = -1$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} \xrightarrow[\text{forrige sats}]{} F = F'! \quad \blacksquare$$

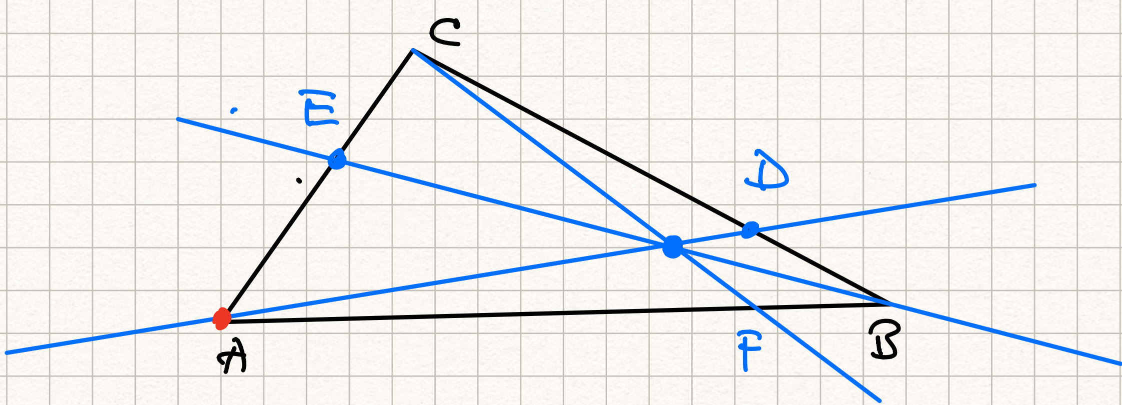
Har jukset litt. Hva hvis DE & AB er parallelle? Da kan jeg ikke lage F'



Så vi har egentlig bare vist $\Rightarrow$:
Hvis vi kan plassere problemet i $\mathbb{P}^2$ så har vi sjans siden ED & AB snitter i ℓ_∞.
dvs F et pkt på ℓ_∞.

"Duale" resultat av Cevas teorem

En linje gj. et hjørne, som ikke inneholder en kant er en Ceva-linje. Linja snitter utvidelse av motsatt kant i et Menelaos pkt D, så vi id. Cevalinje med AD.



Cevas teorem: Dersom 3 Ceva linjer AD, BE, CF er konkurrente (møtes i et pkt) så er

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1$$

Hvis likhet så er Ceva linjene parallelle eller konkurrente.

—

Se bevis Setning 9.4 i heftet.

Kan bruke Menelaos til å vise to sentrale teoremer i plan geometri:

Pappos' teorem:

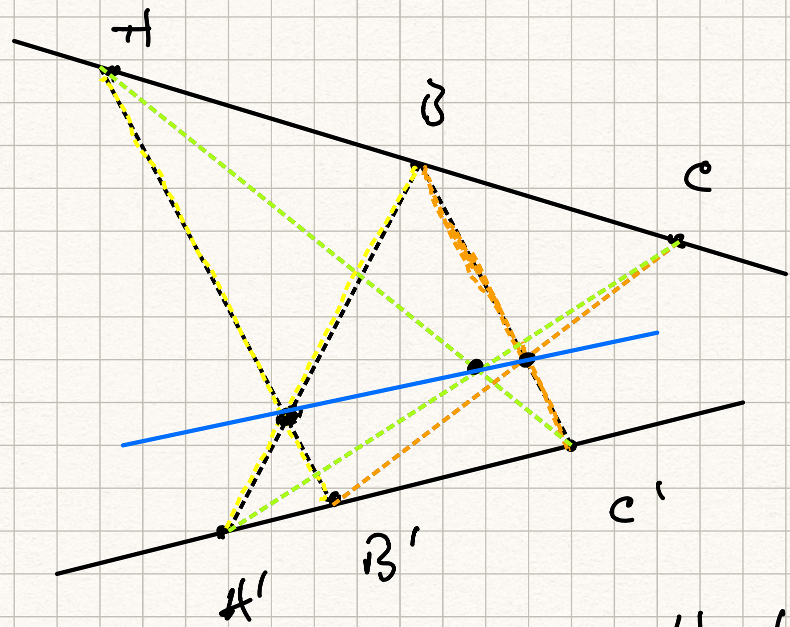
A, B, C punkter på l.

A', B', C' — " — l'.

La $l_{AB'}$ være linja gj. A & B' osv.

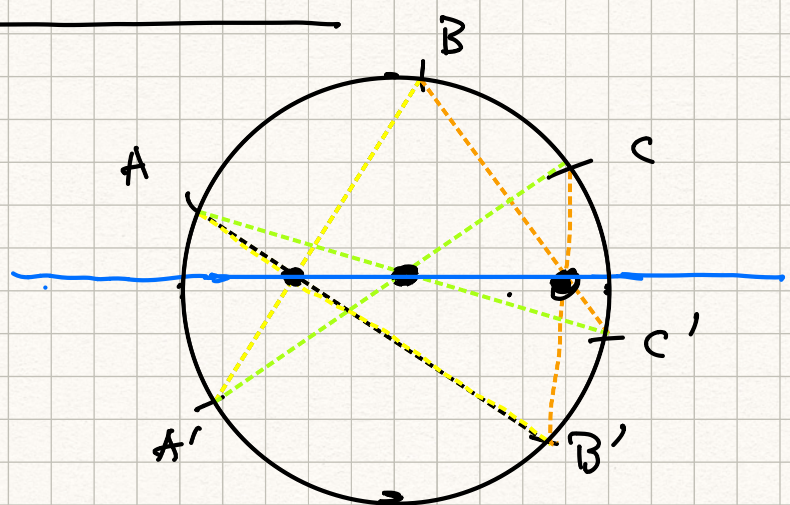
$l_{AB'} \cap l_{A'B}$, $l_{BC'} \cap l_{CB'}$ & $l_{CA'} \cap l_{AC'}$

er kollineære, (ligger på en linje)



Husk 2 linjer er en degenerert kjeglesnitt!

Pascals teorem:



Alle disse teoremene tilhører projektiv geometri & der

- Blir de bedre (mere generelle)
- Fører til utvidelser av resultatene i det vanlige planet!

Merk: Alle handler om insidens, er punkter på en linje eller møtes linjene i et punkt.

Begrepet avstand (og vinkler) er unødvendig bortsett fra rettet avstand

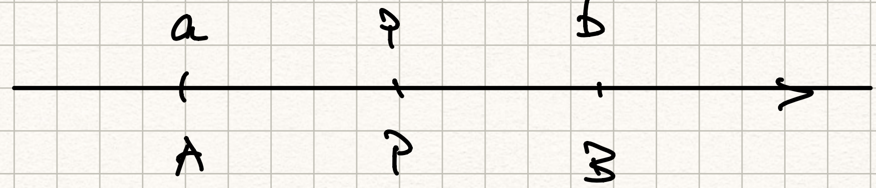
$\overline{AB}$

Men i teoremene bruker vi forholdet

$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$ for 3 punkter på en linje.

I vår projektive geometri finns ikke avstands begrepet, men delingsforholdet er også uavhengig av avstand, bare forholdet!

Hvis linja er $\mathbb{R}$, si x-aksen



$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{p-a}{b-p}$$ invariant under skalering $\cdot\lambda$ & translasjon $+c$

siden $$\frac{\lambda p + c - (\lambda a + c)}{\lambda b + c - (\lambda p + c)} = \frac{p-a}{b-p} \quad !$$

Kun et uttrykk for forholdet

På $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, hvis $P = \infty$

men $$\lim_{p \to \pm\infty} \frac{p-a}{b-p} = \frac{1 - a/p}{b/p - 1} = -1$$

Så $$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = -1$$ hvis $P = \infty$

Kan nå vise at teoremet gjelder i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ for projektive linjer.