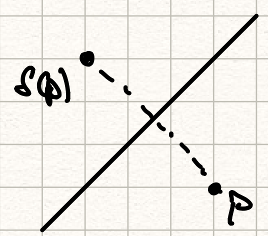
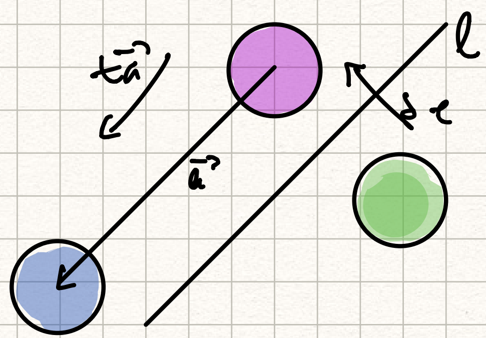
Isom_2

Liste:

1) Translasjoner. $t_{\vec{a}}$
2) Rotasjoner. $\rho_{\theta,p}$ om p med vinkel θ
3) Speilinger. Speiling om en linje ℓ



4) Glide speilinger. $t_{\vec{a}} \circ s_\ell$ der $\vec{a}$ er parallell til ℓ.



Hovedresultat for Isom_2: En hver isometri av planet er en av disse 4 typene.

Start bevis med tilfelle for tilfelle:

1) m or. bevarende & $m(0) = 0 \Rightarrow m$ en rotasjon om O

Bevis: Vet $m = T$, en ortogonal op siden $m(0) = 0$.
La A være st. matrisen til T, A ort. matrise

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \text{ ortonormal basis}$$

Spesielt $\|(a,c)\| = 1$ så på enhetssirkelen &

$a = \cos\theta$, $c = \sin\theta$ for passende θ.

$(a,c)\cdot(b,d) = 0$ & $\|(b,d)\| = 1$ gir enten

$$b = \lambda c \qquad \& \quad b^2 + d^2 = \lambda^2(a^2+b^2) = \lambda^2 = 1$$
$$d = -\lambda a \qquad \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

T or. bevarende $\Rightarrow$ $\det A = 1$ $\underset{\text{sjekk}}{\Rightarrow}$ $b = -c$, $d = a$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ \& \ T = \rho_\theta .$$

$\boxtimes$

Notasjon: $\rho_\theta = \rho_{\theta,0}$ & s = speiling om x-aksen

der matrisen til s er $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2) En hver <u>or. bevarende</u> isometri av E^2 kan skrives $m = t_{\vec{a}} \circ \rho_\theta$ for passende $\vec{a}$ & θ.

— " — <u>or. reverserende</u> — " —
— " — $m = t_{\vec{a}} \circ \rho_\theta \circ s$ — " — .

<u>Bevis:</u>

$m = t_{\vec{a}} \circ T$. m or. bevarende $\Rightarrow \det T = 1$

$\Rightarrow T = \rho_\theta$ fra 1) $\Rightarrow m = t_{\vec{a}} \circ \rho_\theta$

m or. reverserende $\Rightarrow \det T = -1 \Rightarrow$
$\det(T \circ s) = 1 \Rightarrow T \circ s = \rho_\theta$. Men $s^{-1} = s$
så $T = \rho_\theta \circ s^{-1} = \rho_\theta \circ s$ & $m = t_{\vec{a}}\, \rho_\theta\, s$.

$\boxtimes$

Regneoppgave vi vil trenge.

- $t_{\vec{a}+\vec{b}} = t_{\vec{a}} \circ t_{\vec{b}}$

- $\rho_\theta \circ t_{\vec{a}} = t_{\rho_\theta(\vec{a})} \circ \rho_\theta$

3) Hvis m or. bevarende & har et fikspunkt p, $m(p) = p$, da er $m = \rho_{\theta,p}$ for passende θ.

<u>bevis</u>: Fra 2) er $m = t_{\vec{a}} \circ \rho_\theta$

$p = m(p) = t_{\vec{a}}(\rho_\theta(p)) = \rho_\theta(p) + \vec{a}$

$\Rightarrow \quad \vec{a} = p - \rho_\theta(p)$. Så

$$m = t_{p-\rho_\theta(p)} \circ \rho_\theta = t_p \circ t_{-\rho_\theta(p)} \circ \rho_\theta$$

$$\underset{\rho \text{ lineær}}{=} t_p \circ t_{\rho_\theta(-p)} \circ \rho_\theta \underset{\text{regneoppgaven}}{=} t_p \circ \rho_\theta \circ t_{-p}$$

$$= \rho_{\theta,p} \qquad \blacksquare$$

4) Hvis m er or. bevarende & <u>ikke</u> en translasjon så er m en rotasjon.

<u>bevis</u>: Fra 3) nok å vise at m har et fikspunkt.

$m = t_{\vec{a}} \circ \rho_\theta$ & m <u>ikke</u> translasjon $\Rightarrow \theta \neq 0$

Skal løse for fikspunkt $p = (x,y)$, $\vec{a} = (a,b)$

$m(p) = p \iff t_{\vec{a}} \circ \rho_\theta(x,y) = (x,y) \iff$

$\rho_\theta(x,y) + (a,b) = (x,y) \iff (id - \rho_\theta)(x,y) = (a,b)$

2 lineære likninger med matrise

$$\begin{pmatrix} 1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix}$$ som har det. =

$1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta = 2(1-\cos\theta) \neq 0$

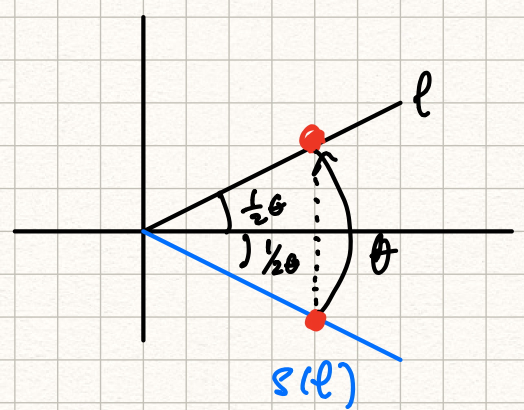
siden $\theta \neq 0$. Entydig løsning som er fikspunktet ∎

5) Hvis hvert punkt på en linje l er et fikspkt for m, da er m speilingen om linja l.

Bevis: Oppgave med passer og linjal.

6) $\rho_\theta \circ s$ er s_l der l er linja gjennom O med vinkel $\frac{1}{2}\theta$ til x-aksen.

Bevis:



Av figuren ser vi at $\rho_\theta \circ s$ har alle punkter på l som fikspunkter. Fra 5) følger at $\rho_\theta \circ s = s_l$

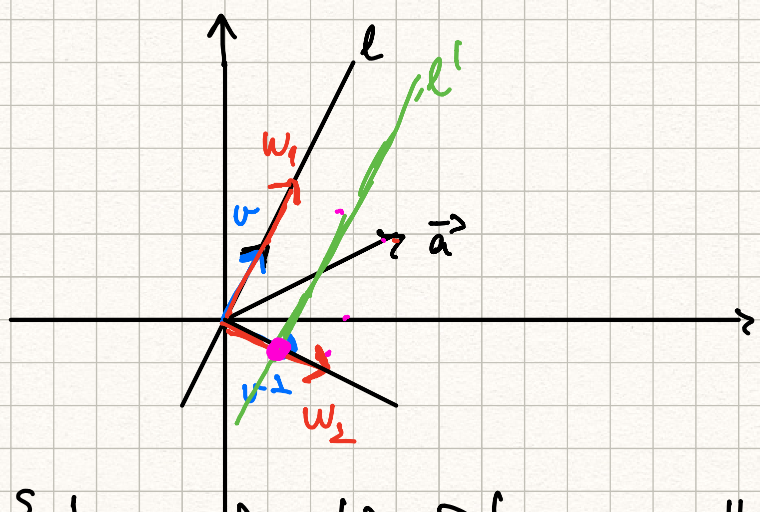
∎

7) Hvis m er or. reverserende så er m enten en speiling eller glidespeiling.

Fra 2) & 6) kan vi skrive $m = t_{\vec{a}} \circ s_l$ for en linje l gjennom O.

La v være retningsvektor for l med $\|v\| = 1$, dvs $l = \{ \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$. Hvis $v = (v_1, v_2)$ la $v^\perp = (-v_2, v_1)$
$\{v, v^\perp\}$ ortonormal basis for $\mathbb{R}^2$ & husk fra lin. alg.

$$\vec{a} = \underbrace{(\vec{a} \cdot v)\, v}_{w_1} + \underbrace{(\vec{a} \cdot v^\perp)\, v^\perp}_{w_2}$$



La $l' = \{ \frac{1}{2} w_2 + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$, parallell til l med avstand $\frac{1}{2}\|w_2\|$ til l.

Skal vise at vår $t_{\vec{a}} \circ s_l = \underline{t_{w_1} \circ s_{l'}}$ som er en glidespeiling (hvis $w_1 \neq 0$) siden w_1 er parallell med l' eller speiling hvis $w_1 = 0$, dvs $\vec{a} \perp l$

Regneoppgaver: $s_{l'} = t_{\frac{1}{2} w_2} \circ s_l \circ t_{-\frac{1}{2} w_2}$

$$s_l \circ t_{-\frac{1}{2} w_2} = t_{\frac{1}{2} w_2} \circ s_l$$

Så $t_{w_1} \circ s_{l'} = t_{w_1} \circ t_{\frac{1}{2} w_2} \circ s_l \circ t_{-\frac{1}{2} w_2}$

$$= t_{w_1} \circ t_{\frac{1}{2}w_2} \circ t_{\frac{1}{2}w_2} \circ s_\ell$$

$$= t_{w_1 + w_2} \circ s_\ell \quad = t_{\vec{a}} \circ s_\ell \quad !$$

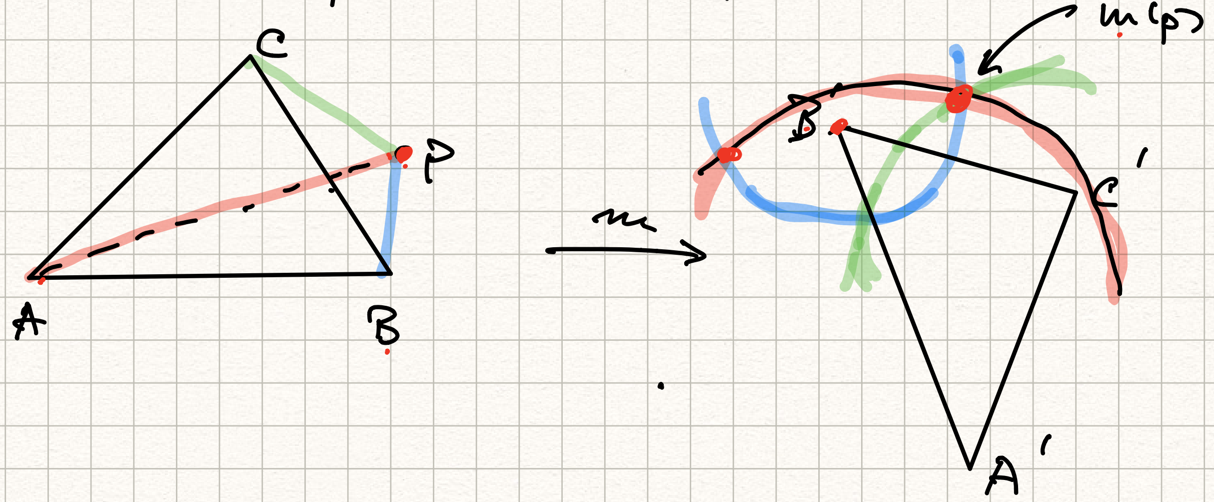
$\boxtimes$

Med kun geometriske betraktninger.

Skisse:

3 punkter i planet er i generell posisjon hvis de ikke ligger på en linje. (Trekant)

1) En isometri av E^2 er bestemt av sine verdier på en trekant.



(Må være kongruent)

Gitt m som tar ABC til $A'B'C'$ & p vilkårlig må finne $m(p)$.

Må ha $d(p,A) = d(m(p), A') \Rightarrow m(p)$ ligger på sirkelen med senter A' & radius $d(p,A)$.

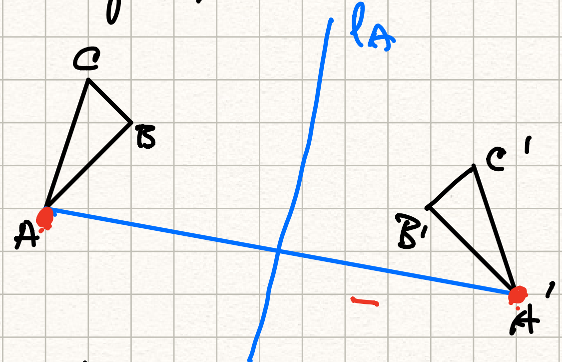
— " — $d(p,B) = d(m(p), B') \Rightarrow$ — " —

———————— " ———— B' ——— " – d(p, B).
Snittet er 2 punkter & avstanden til C'
bestemmer hvilken.

<u>Oppgave</u> Hvorfor bestemmer avstanden til
C m(p)? Dvs hvorfor kunne ikke begge
snittpunktene til sirklene konstruert fra A' & B'
ha samme avstand til C?

2) Enhver isometri av E^2 er en
sammensetning av 1, 2 eller 3 speilinger!

Nok å komme fra en trekant til en
vilkårlig kongruent trekant med 3
speilinger.



Skal først bringe $A \to A'$. La l_A være
midtnormalen til linjebiten fra A til A'.
S_{l_A} tar $A \to A'$.

Oppgave: Hva skjer med B & C? Fullfør
beviset.

Kan må analysere alle muligheter
som forekommer med å sette sammen

2 eller 3 speilinger. Omfattende arbeid, men verdt det!