MAT 2500 01.09.2020

(1) $f: X \to Y$ bijektiv $\Leftrightarrow$ f har invers funksjon

$\Rightarrow$ Anta f bijektiv

- injektiv $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- surjektiv $f(X) = Y$ dvs $\forall\, y \in Y\ \exists\, x \in X$ s.a. $f(x) = y$.

Definer $g: Y \to X$ ved $g(y) = x$ hvis $f(x) = y$

I: Veldefinert:

Vet at siden f er surjektiv fins $x \in X$ s.a. $f(x) = y$ $\forall\, y \in Y$.

Anta at $g(y) = x_1$ og $g(y) = x_2$,

men da er $f(x_1) = y = f(x_2)$,

og siden f er injektiv er $x_1 = x_2$.

II: $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x = id_X(x)$ — $x \in X$ og $y = f(x)$, så er $g(y) = x$

si (x^2)

$f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x) = y = id_Y(y)$, så $g = f^{-1}$. — $y \in Y$ og $g(y) = x$ så er $f(x) = y$

$\Leftarrow$ f har invers

$f: X \to Y$ og $f^{-1}: Y \to X$

Skal vise f bijektiv

- SURJEKTIV

Ta $y \in Y$. Siden vi har f^{-1}, så fins $x \in X$ s.a. $f^{-1}(y) = x$.

og $y = f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x)$, så f er surjektiv.

- INJEKTIV

Hvis $f(x_1) = f(x_2)$

$$\underbrace{x_1 = f^{-1} \circ f(x_1) = f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) = f^{-1} \circ f(x_2) = x_2}$$

så f er injektiv. $\blacksquare$

1 b) Skal vise hvis $f, g : X \to X$ bijektive funksjoner så er $f \circ g$ også bijektiv.

• INJEKTIV: Anta $f \circ g(x_1) = f \circ g(x_2)$

$$f(g(x_1)) = f(g(x_2))$$

Siden f er injektiv: $g(x_1) = g(x_2)$

Siden g er injektiv $x_1 = x_2$,

så $f \circ g$ er injektiv.

• SURJEKTIV: La $x \in X$ vilkårlig

Siden f er surjektiv, finn x' s.a. $f(x') = x$.

Siden g er surjektiv, finn x'' s.a. $g(x'') = x'$

Da er $f \circ g(x'') = f(g(x''))$

$$= f(x')$$

$$= x.$$

så $f \circ g$ er surjektiv

TOTALT: $f \circ g$ er bijektiv.

2) La $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ være n vektorer i $\mathbb{R}^n$ med egenskapen

$$\beta_i \cdot \beta_j = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i \neq j \\ 1 & \text{hvis } i = j \end{cases}$$

A) Skal vise $\beta_1, \dots, \beta_n$ er lineært uavhengige.

Hvis $a_1\beta_1 + \dots + a_n\beta_n = \underline{0}$, $a_i \in \mathbb{R}$

$\iff a_i = 0.$

Anta at det finnes $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ s.a.

$$a_1\beta_1 = -(a_2\beta_2 + \dots + a_n\beta_n)$$

Men da er

$$a_1 \underbrace{\beta_1 \cdot \beta_1}_{=1} = -(a_2\beta_2 + \dots + a_n\beta_n) \cdot \beta_1$$

$$a_1 = -(a_2 \underbrace{\beta_2 \cdot \beta_1}_{=0} + \dots + a_n \underbrace{\beta_n \cdot \beta_1}_{0}) = 0$$

Tilsvarende vil alle $a_i = 0$, så $\{\beta_i\}$ er lineært uavhengige.

B) Skal konkludere at $\{\beta_i\}$ utgjør en <u>ortonormal</u> basis for $\mathbb{R}^n$.

$\beta_i \cdot \beta_i = 1 \qquad \|\beta_i\| = 1$

$\beta_i \cdot \beta_j = 0$ når $i \neq j$.

og $\{\beta_i\}$ er n lineært uavhengige vektorer, så de er en basis for $\mathbb{R}^n$.

(3) $m = t_{\underline{a}} \circ T \qquad \underline{a} \in \mathbb{R}^n \quad T$ ortogonal operator

Hvis $t_{\underline{a}} \circ T = t_{\underline{b}} \circ S$, så er $\underline{a} = \underline{b}$ og $T = S$

- $$\underbrace{t_{\underline{a}} \circ T(\underline{0})}_{\underline{a}} = \underbrace{t_{\underline{b}} \circ S(\underline{0})}_{\underline{b}}$$

  $$\underline{a} = \underline{b}$$

- $\underline{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad T(e_j) = S(e_j) \quad \forall\ j = 1, \ldots, n$

  $T_{ij} = S_{ij} \quad \forall\ i = 1, \ldots, n$ og $j = 1, \ldots, n$

  så $T = S$.

3b

$$(t_{\underline{a}} \circ T) \circ (t_{\underline{b}} \circ S) = t_{\underline{a}+T(\underline{b})} \circ (T \circ S) = t_{\underline{c}} \circ R$$

$$(t_{\underline{a}} \circ T) \circ (t_{\underline{b}} \circ S)(\underline{0}) = (t_{\underline{a}} \circ T)(\underline{b})$$
$$= \underline{a} + T(\underline{b})$$
$$= t_{\underline{a}+T(\underline{b})}(\underline{0}) = t_{\underline{c}} \circ R(\underline{0})$$

$$\underline{c} = t_{\underline{a}+T(\underline{b})}$$

$$(t_{\underline{a}} \circ T) \circ (t_{\underline{b}} \circ S)(\underline{x}) = (t_{\underline{a}} \circ T) \circ (\underline{b} + S(\underline{x}))$$
$$= t_{\underline{a}}(T(\underline{b}) + T \circ S(\underline{x}))$$
$$= \underline{a} + T(\underline{b}) + T \circ S(\underline{x})$$
$$= t_{\underline{a}+T(\underline{b})} \circ (T \circ S)(\underline{x})$$

V/ a) er skrivemåten entydig.

3c) Veldefinert $m = t_{\underline{a}} \circ T$ $\quad m = t_{\underline{b}} \circ S$

i a) viste vi at $\underline{a} = \underline{b}$

og $T = S$.

$$m_1 = t_{\underline{a}_1} \circ T_1 \qquad m_2 = t_{\underline{a}_2} \circ T_2$$

$$m_1 \circ m_2 = (t_{a_1} \circ T_1) \circ (t_{\underline{a}_2} \circ T_2)$$

$$\overset{b)}{=} t_{\underline{a}_1 + T_1(\underline{a}_2)} \circ (T_1 \circ T_2)$$

Orienteringsbevarende : $\det T = 1$

reverserende : $\det T = -1$

$$\det(T_1 \circ T_2) = \det T_1 \cdot \det T_2$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{To or. bev:} & \det(T_1 \circ T_2) = 1 \cdot 1 = 1 \\ \text{To or. rev:} & \det(T_1 \cdot T_2) = (-1)\cdot(-1) = 1 \end{array}\right\} \text{or. bev.}$$

En av hver $\quad \det(T_1 \circ T_2) = (-1) \cdot 1 = -1 \quad$ or. rev.