MAT 2500 04.09.2020

(4) 2.4.2 fra heftet

(I) Skal vise $d(\underline{x},\underline{y}) = 0 \iff \underline{x} = \underline{y}$ for $\underline{x},\underline{y} \in E^n$.

$\Rightarrow$ $0 = d(\underline{x},\underline{y}) = \|\underline{x}-\underline{y}\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$

Siden $(x_i-y_i)^2 \geq 0$ for alle i, så må $(x_i-y_i)^2 = 0$

Og dermed er $x_i = y_i$ for alle $i = 1,..,n$, så $\underline{x} = \underline{y}$.

$\Leftarrow$ $\underline{x} = \underline{y}$, så er $x_i = y_i$ $\forall i = 1,\dots,n$.

Og da er $\|\underline{x}-\underline{y}\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2} = \sqrt{0^2 + \dots + 0^2} = 0$.

(II) Skal vise at $m: E^n \to E^n$ som bevarer avstand nødvendigvis er injektiv.

La $\underline{x},\underline{y} \in E^n$, og se på

$$d(\underline{x},\underline{y}) = d(m(\underline{x}), m(\underline{y}))$$

Anta $m(\underline{x}) = m(\underline{y})$.

v/(I) så er $d(m(\underline{x}), m(\underline{y})) = 0 = d(\underline{x},\underline{y})$ siden m bevarer avstand

v/(I) så er $\underline{x} = \underline{y}$, og m er injektiv.

5 2.4.3. $F \subseteq E^n$ delmengde

Skal vise $Sym(F)$ er en UNDERGRUPPE av $Isom_n$.

s.4. • m er en SYMMETRI ^{F} hvis $m(F) = F$

• Undergruppe : Lukket under A. binæroperasjon $\circ$

B. inverser

A. La $m_1, m_2 \in Sym(F)$

Da er $m_1 \circ m_2(F) = m_1(m_2(F))$ siden $m_2 \in Sym\,F$

$= m_1(F)$ siden $m_1 \in Sym\,F$.

$= F$.

B La $m \in Sym(F) \subseteq Isom_n$.

Så $m^{-1} \in Isom_n$ s.a. $m^{-1} \circ m = id$

$$m^{-1}(F) \underset{\uparrow}{=} m^{-1}(m(F)) = m^{-1} \circ m(F) = id(F) = F$$

siden $m \in Sym(F)$

Så $m^{-1} \in Sym(F)$.

Totalt er $Sym(F)$ en undergruppe av $Isom_n$

⑥ $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

La $H_{\underline{a},c} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n a_i x_i = c\}$

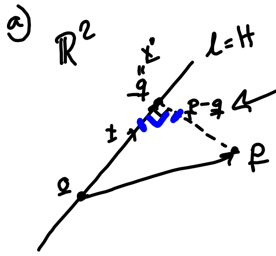
Hyperplan – $(n-1)$-dimensjonalt lineært underrom av $\mathbb{R}^n$.

S_H – En speiling av $\mathbb{R}^n$ om H, fikserer alle pkt i H

$S_H(\underline{p}) = \underline{p}$ for alle $\underline{p} \in H$

Anta $H_{\underline{a},0}$, så $\underline{0} \in H$.

a) $\mathbb{R}^2$



Må minimere $\|\underline{p} - \underline{x}\|^2$ med restriksjon

$\sum_{i=1}^n (p_i - x_i)^2$ $\qquad \sum_{i=0}^n a_i x_i = 0$.

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n (p_i - x_i)^2 - \lambda\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_{x_i} = -2(p_i - x_i) - \lambda a_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \end{cases}$$

$\underline{n=2}$:

$$\left.\begin{aligned} \lambda a_1 &= 2(x_1 - p_1) \\ \lambda a_2 &= 2(x_2 - p_2) \end{aligned}\right\} \qquad \lambda = \frac{2}{a_1}(x_1 - p_1) = \frac{2}{a_2}(x_2 - p_2)$$

$$\underline{a_2(x_1 - p_1) = a_1(x_2 - p_2)}$$

$$\underline{a_1 x_1 = -a_2 x_2}$$

$$\begin{cases} a_2 x_1 - a_1 x_2 = p_1 a_2 - a_1 p_2 \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} a_2 & -a_1 & p_1 a_2 - a_2 p_2 \\ a_1 & a_2 & 0 \end{array}\right)$$

Cramers regel $\quad x_1^* = \dfrac{\begin{vmatrix} p_1 a_2 - a_1 p_2 & -a_1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix}}{a_2^2 + a_1^2} = a_2 \cdot \dfrac{\underbrace{(p_1 a_2 - a_1 p_2)}_{=c}}{\underbrace{(a_2^2 + a_1^2)}_{=d}}$

$$x_2^* = -a_1 \cdot \frac{c}{d}$$

Da er $\underline{x}^* \cdot (\underline{p} - \underline{x}^*)$

$$= \underline{x}^* \cdot \underline{p} - \underline{x}^* \cdot \underline{x}^*$$

$$= x_1^* \cdot p_1 + x_2^* \cdot p_2 - (x_1^{*2} + x_2^{*2})$$

$$= a_2 \cdot \frac{c}{d} \cdot p_1 + (-a_1) \cdot \frac{c}{d} \cdot p_2 - a_2^2 \frac{c^2}{d^2} - a_1^2 \frac{c^2}{d^2}$$

$$= \frac{c}{d}\underline{(a_2 p_1 - a_1 p_2)} - \frac{c^2}{d^2}\underline{(a_2^2 + a_1^2)}$$

$$= \frac{c^2}{d} - \frac{c^2}{d}$$

$$= 0.$$

Så $\underline{x}^* \perp (\underline{p} - \underline{x}^*)$.