MAT 2500 03.11.2020

16 - 6.6.11

$\underset{\underset{\text{linje}}{\uparrow}}{\ell}, \underset{\underset{\text{n-te gradskurve}}{\uparrow}}{C} \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ $\ell \not\subseteq C$. Skal vise $|\ell \cap C| \leq n$

$\ell : x_2 = 0$

$C : F(x_0, x_1, x_2) = \sum_{i+j+k=n} \overset{\in \mathbb{R}}{a_{ijk}} x_0^i x_1^j x_2^k = 0$

$C \cap \ell : F(x_0, x_1, 0) = \sum_{i+j=n} a_{ij} x_0^i x_1^j = 0$ $\boxed{a_{ij} = a_{ij0}}$

$= \sum_{i=0}^{n} a_i x_0^i x_1^{n-i} = 0$

Kan anta at x_0 og x_1 ikke er faktor i $F(x_0, x_1)$

$x_1 = 1$: $F(x_0, 1, 0) = \sum_{i=0}^{n} a_i x_0^i = 0$

- n-te grads polynom i 1. variabel med koeff. i $\mathbb{R}$.
- Algebraens fundamentalteorem : F har $\leq n$ røtter over $\mathbb{R}$.
- Derfor har $|\ell \cap C| \leq n$ punkter for $\mathbb{R}$
  $= n$ for $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$
- Bézout's teorem :
  $\underset{n}{C}$ og $\underset{n'}{C'}$ så vil $|C \cap C'| \leq n \cdot n'$ ~~over~~ $\mathbb{R}$
  $= n \cdot n'$ over $\mathbb{C}$.

17 - 1

$P_1 = (0:0:1)$
$P_2 = (-1:1:1)$
$P_3 = (1:1:1)$
$P_4 = (0:1:0)$

$$[X, P_1, P_2] = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -x_0 - x_1 \quad : \quad x_0 + x_1 = 0$$

$$[X, P_3, P_4] = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -x_0 + x_2 \quad : \quad x_2 - x_0 = 0$$

$$q_1(x_0, x_1, x_2) = \underline{(x_0 + x_1) \cdot (x_2 - x_0)}$$

$$[X, P_1, P_4] = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -x_0 \quad : \quad x_0 = 0$$

$$[X, P_2, P_3] = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -x_1(-2) + x_2(-2)$$
$$= 2x_1 - 2x_2$$
$$: \quad x_1 - x_2 = 0$$

$$q_2(x_0, x_1, x_2) = \underline{x_0(x_1 - x_2)}$$

FAMILIEN ER: $\lambda(x_0 + x_1)(x_2 - x_0) + \mu x_0(x_1 - x_2) = 0$
$(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$

For hvilke $(\lambda : \mu)$ er $Q_{\lambda,\mu}(x_0, x_1, x_2) = \lambda(x_0+x_1)(x_2-x_0) + \mu x_0(x_1-x_2)$

$C_{\lambda,\mu} : Q_{\lambda,\mu} = 0$.

$(\lambda : \mu) = (0:1) \quad : \quad C_{0,1} : x_0(x_1 - x_2) = 0$

$(\lambda : \mu) = (1:0) \quad : \quad C_{1,0} : (x_0+x_1)(x_2-x_0) = 0$

$$Q_{\lambda,\mu} = -\lambda x_0^2 + (\mu-\lambda)x_0x_1 - (\mu-\lambda)x_0x_2 + \lambda x_1 x_2$$

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{\mu-\lambda}{2} & -\frac{(\mu-\lambda)}{2} \\ \frac{\mu-\lambda}{2} & 0 & \frac{\lambda}{2} \\ -\frac{(\mu-\lambda)}{2} & \frac{\lambda}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$Q_{\lambda,\mu}$ er degenerert når $\det A = 0$:

$$0 = -\lambda\left(-\frac{1}{4}\lambda^2\right) - \frac{(\mu-\lambda)}{2}\left(\frac{\lambda}{4}(\mu-\lambda)\right) - \frac{(\mu-\lambda)}{2}\left(\frac{(\mu-\lambda)}{2}\cdot\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda(\mu-\lambda)^2$$

$$= \frac{1}{4}\lambda\left(\lambda^2 - (\mu-\lambda)^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\lambda\left(-\mu^2 + 2\mu\lambda\right)$$

$$= \frac{1}{4}\lambda\mu(2\lambda - \mu)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda = 0,\ \mu = 0 \\ 2\lambda = \mu \end{array}}$$

$\underline{(\lambda : \mu) = (1 : 2)}$

Skal vise at for nøyaktig én verdi $(\lambda:\mu)$
så er $C_{\lambda,\mu}$ en parabel:

$$Q_{\lambda,\mu} = \underline{-\lambda x_0^2 + (\mu-\lambda)x_0x_1} \overset{0\cdot x_1^2}{} - (\mu-\lambda)x_0x_2 + \lambda x_1x_2$$

$$D = b^2 - 4ac = (\mu-\lambda)^2 \quad \begin{array}{l} = 0 \text{ for } \mu=\lambda \\ > 0 \text{ for alle andre} \end{array}$$

v/ 6.13 så er $C_{\lambda,\mu}$ parabel for $(1:1)$
$C_{\lambda,\mu}$ hyperbel for alle andre verdier.
(unntatt de degenererte)

17-2 : EKSAMEN 2010 - 3

$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ $(x_0 : x_1 : x_2)$

a) $L_1 : 2x_0 + 3x_1 - 6x_2 = 0$ Skal finne $P = L_1 \cap L_2$

$L_2 : -x_0 + x_1 + 3x_2 = 0$

$\times$: $\underline{v}_P \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$\underline{v}_P = (2, 3, -6) \times (-1, 1, 3)$

$= (3 \cdot 3 - (-6) \cdot 1,\ (-6)(-1) - 2 \cdot 3,\ 2 \cdot 1 - 3(-1))$

$= (15, 0, 5)$

$\underline{\underline{P = (3 : 0 : 1)}}$

G-J : $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -6 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \underline{1} & 0 & 0 \\ \underline{1} & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$ $x_2 = t$, $x_1 = 0$, $x_0 = 3x_2 = 3 \cdot t$

$\underline{\underline{P = (3 : 0 : 1)}}$

b) $Q = (9:0:4)$ $\qquad l = PQ$

$P = (3:0:1)$ $\qquad l: x_1 = 0$

$$\underline{0} = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -x_1(3\cdot 4 - 9\cdot 1) = \underline{-3x_1}$$

$$\underline{\underline{x_1 = 0}}$$

c) $\ell: x_1 = 0$ $C: x_1 x_2 - x_0^2 = 0$

affine plan U_2 (der $x_2 \neq 0$)

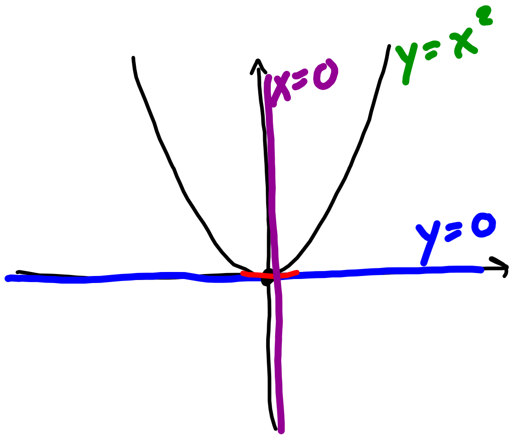
$\ell \cap U_2: \frac{x_1}{x_2} = 0$

$y = 0$

$C \cap U_2: \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_2} - \frac{x_0^2}{x_2^2} = 0$

$y - x^2 = 0$

$\underline{y = x^2}$



$(0,0)$ er skjæring mellom ℓ og C på U_2.

på $\mathbb{P}^2$: $\ell \cap C: 0 \cdot x_2 - x_0^2 = 0$

$x_0^2 = 0$

$(0:0:1)$

2

Så ℓ er tangent til C i $(0:0:1)$.

17-3 EKSAMEN 2010 - 4

ΔPQR og $\Delta P'Q'R'$ i $\mathbb{R}^2$

- Anta PP', QQ' og RR' er parallelle

Skal bruke DESARGUES (6.7 s 86 i heftet) i $\mathbb{P}^2$

- Hvis $PQ \parallel P'Q'$ og $RQ \parallel R'Q'$,
  så er $PR \parallel P'R'$

- DESARGUES PÅ $\mathbb{P}^2$

Hvis to trekanter PQR og $P'Q'R'$ er i PERSPEKTIV i $\mathbb{P}^2$
og $X = PQ \cap P'Q'$, $Y = RQ \cap R'Q'$, $Z = PR \cap P'R'$
så er X, Y, Z kollineære

VI HAR:
- $PQ \parallel P'Q' \Rightarrow X \in l_\infty$
- $RQ \parallel R'Q' \Rightarrow Y \in l_\infty$

$\Big\} \; XY = l_\infty$

- Desargues: Hvis PERSPEKTIV, så er X, Y, Z kollineære,
  så $Z \in l_\infty$ og $PR \parallel P'R'$

NOK Å VISE: ΔPQR og $\Delta P'Q'R'$ er i perspektiv.

PERSPEKTIV: Må finne $\varphi : \Delta PQR \to \Delta P'Q'R'$ bijeksjon
og punkt O s.a. $x \in \Delta PQR$
og $\varphi(x) \in \Delta P'Q'R'$
slik at O er på linja gjennom x og $\varphi(x)$

$$\varphi: \left.\begin{array}{l} \varphi(P) = P' \\ \varphi(Q) = Q' \\ \varphi(R) = R' \\ \varphi(O) = O \end{array}\right\}$$

En lineær transformasjon projektiv er entydig bestemt!

$$PP' \parallel QQ' \parallel RR' \qquad O \in PP' \cap QQ' \cap RR'$$

$$X = \lambda_P P + \lambda_Q Q + \lambda_R R \quad \text{for gitte } \lambda_P, \lambda_Q, \lambda_R$$

$$\varphi(X) = X' = \lambda_P P' + \lambda_Q Q' + \lambda_R R'$$

$$XX' = \lambda_P PP' + \lambda_Q QQ' + \lambda_R RR'$$

så $XX' \parallel PP'$ og QQ' og RR'

og dermed $O \in XX'$ og ΔPQR og $\Delta P'Q'R'$ er i Perspektiv