

Plan for undervisningen i MAT 2500

1. Syntetisk / analytisk geometri

Syntetisk: Konstruksjoner, praktiske og teoretiske

Punkter, linjer, sirkler, skjæringspunkter.

Analytisk: Introdusere avstander, eller hvert koordinater, relatere til algebraiske uttrykk; $x^2 + y^2 = 1$.

2. Geometri via symmetrier.

Regulære figurer; linjer, mangekanter, sirkler, avbildninger som bevarer form (symmetrier), klassifisering via symmetri-egenskaper; border, tapetmønstre, krystaller, molekylstruktur, Platonske (regulære) legemer. Litt topologi!

3. Kjeglesnitt.

Grundig studie av kvadratiske kurver (sirkler, ellipse, hyperbler) Første nivå over linjer, ligger under analytisk geometri. Figurene har mange fine egenskaper som vi kan bruke i anvendelse.

4. Prosjektiv geometri

Motivet av projeksjonstegning, inkludere punkter i det uendelig fjerne. Må droppe avstandsbehold, inkludere og avstand. Andre flere fine egenskaper; parallelle linjer snitter i det uendelig fjerne.

Underviser skal vi gjøre praktiske øvelser:

- med passer og linjal (syntetisk geometri)
- med Tovo-brikker. (symmetrier)

Litt klassisk geometri

Begreper: Punkt (Euklid sier: det som ikke har utstrekning)
Linje (først konstruert/patentert rundt 1860)
Mangekantar...
Sirkler (alle punkter med en gitt avstand til et fast punkt)
Vinkler, herunder rette vinkler

Likeformede trekanter:

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$: Alle vinklere er parvis like store AAA

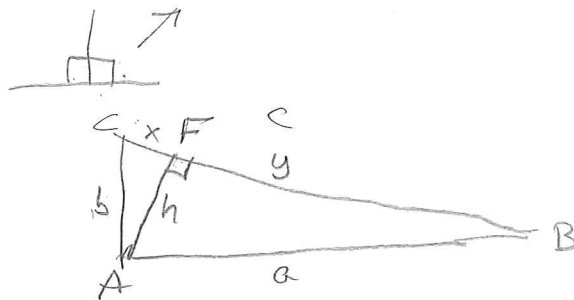
Kongruens (samme størrelse)	{	SAS : sidekant - vinkel - sidekant	{	Translasjoner
		ASA : vinkel - sidekant - vinkel		Rotasjoner
		SSS : sidekant - sidekant - sidekant		Spæilinger

Pythagoras setning:



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Bevis:



areal: $\frac{\text{Grunnflate} \cdot \text{høyde}}{2}$

$$\triangle ABC \sim \triangle FBA \sim \triangle FAC$$

$$\frac{FC}{FA} = \frac{FA}{FB} = \frac{AC}{AB} \quad ; \quad \frac{x}{h} = \frac{h}{y} = \frac{b}{a}$$

$$\text{areal} : \quad \frac{ch}{2} = \frac{ab}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= h \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{c} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b^2}{c} \\ y &= h \cdot \frac{a}{b} = \frac{ab}{c} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{c} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} c(x+y) = c^2 = a^2 + b^2 \end{array} \right.$$

(1831)
(Et poetisk Spilfægteri)

[illegible]

20 Trianglen ABC er givet her,
Retvinklet og paa Siderne Quadrater;
Beviset er nu om de to Krabater,
Det, at Quadraterne paa hvert Catheder
AC, BC (jeg naevne disse Steder)

25 Er' just i Eet og Alt, som den Krabat,
 Hypothenusen kalder sin Quadrat.
 Nu gaee vi da til vore Præparater.

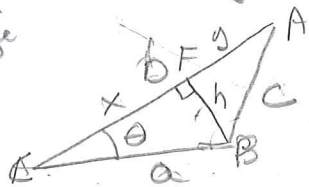
 En lodret Linie maa man som De veed
 Her drage til den større Side ned,
 30 Og saa forlænge den endnu til K,
 Da vil man finde, ei det mindste mangler,
 AB-Quadraten ganske rigtig staae
 Delt (som AK BK) i to Rectangler.
 (Thi tvende Linier, man veed,
 35 Har just det generelle,
 Naar paa en tredie de staae lodret' ned,
 Saa er' de ogsaa ganske parallelle.)
 Nu drages en fra A til G, fra C til I,
 Og da Præparationen er forbi.
 40 Ei sandt, o Mester! — true dog ei med Riset!
 Nu gaee vi til Beviset.
 — Vi har de to Triangler ABG
 Og CBI, hos dem er Vinklen p
 Lig Vinklen o, men o er lig en Ret,
 45 Ja, der er Ingen, som vil nægte det,
 Thi rette Vinkler er der i Quadrater,
 Nu Vinklen r lig Vinklen r. Ei sandt?
 (Thi sund Fornuft kan sige
 Hver størrelse jo med sig selv er lige.)
 50 Saaledes p plus r lig o plus r man fandt,
 (Her i Figuren staae de smaa Krabater.)
 Naar lige nu til begge bliver lagt,
 En lige Sum er da tilvejebragt.
 (Nu er vi med Beviset snart forbi,
 55 Det stærkt mod Enden lider.)
 See Vinklen ABG lig CBI,
 AB er lig BI, BG er lig BC
 (I en Quadrat er' lige store Sider,
 Derfor, saasandt som Tre gjør altid Tre,
 60 To Sider og en Vinkel vil os lette),
 Trianglen ABG vi her tør sætte
 Lig CBI (og det er intet Træf),
 Nu ABG er lig en halv BF
 Pas paa!
 65 Nu CBI er lig en halv BK.

(Husk: lige stort for lige stort kan gaee.)
 Eens er Divisor, eens er Dividenden;
 Eens bliver altsaa ogsaa Quotienten,
 Og ad den samme Vei vi faae:
 70 AD er lig AK.
 Der har Du Maaden,
 Snart som *Pythagoras* man løser Gaaden.

Ja løst, beviist — Du store Tryller!
 Du Himmel Tak! — at det er nu forbi!
 75 Thi slige Vers er ikke Narreri;
 De løbe vel, som der var Intet i —
 Dog her var jo *Fornuft* og *Form*-Magi.
 Det sidste vil jeg haabe,
 Og denne Form er i det minste fri
 80 For hvad der dæmper slemt hver Melodi:
 En Mudderdraabe.)
Fornuft og *Form* har her skabt — Poesi.
 Her seer man „*Formens evige Magie*.“

Varianten zur Pythagoras setzung

Cosinus-satzung



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle CBF: x^2 + h^2 = a^2 \\ \triangle BFA: y^2 + h^2 = c^2 \end{array} \right\} c^2 = a^2 + y^2 - x^2$$

Trigonometrie: $\cos \theta = \frac{x}{a}$ $b = x + y$

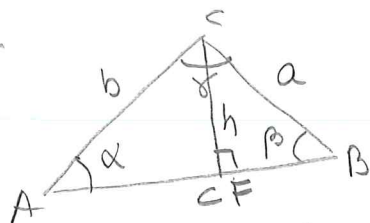
$$\downarrow$$

$$x = a \cos \theta$$

$$y = b - x = b - a \cos \theta$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + (b - a \cos \theta)^2 - (a \cos \theta)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

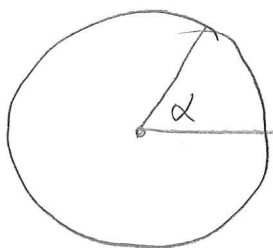
Sinus-satzung



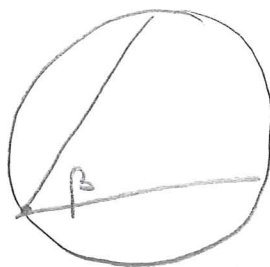
Trigonometrie: $\sin \alpha = \frac{h}{b}$ $\sin \beta = \frac{h}{a} \Rightarrow b \sin \alpha = a \sin \beta$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b}$$

Neu resultater om sirkler

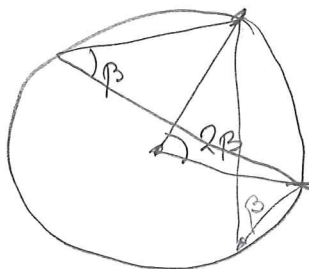


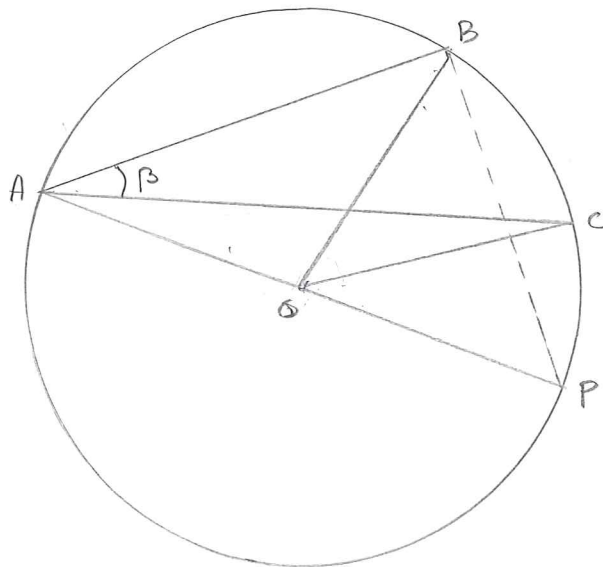
sentralvinkel



perifervinkel

sentral-perifri-satninger:





$$\begin{aligned}\angle AOB + \angle BOP &= \pi \\ \angle COA + \angle COP &= \pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle AOB \\ \triangle AOC\end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned}\triangle AOB \\ \triangle AOC\end{aligned}} \right\} \text{Winkelsumme}$$



$$\begin{aligned}\angle OCA &= \angle CAO \\ \angle OBA &= \angle BAO\end{aligned}$$

Winkelsumme: π

$$\begin{aligned}\angle AOC + \angle OAC + \angle CAO &= \pi \\ \angle AOB + \angle OBA + \angle BAO &= \pi\end{aligned}$$

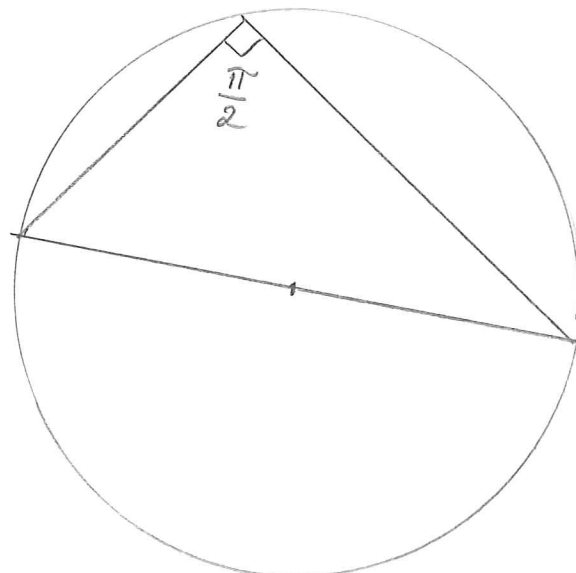
↳

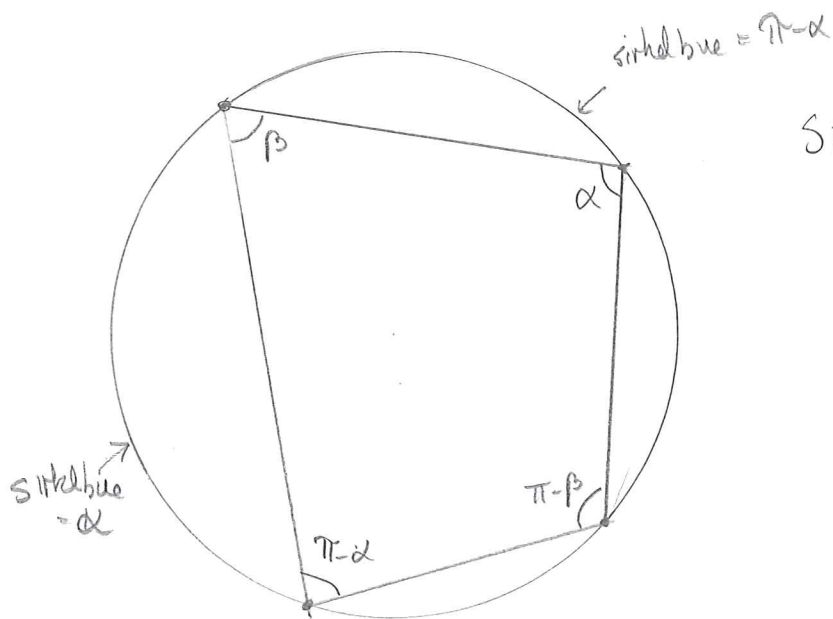
Kombinieren

$$\begin{aligned}\angle BOP &= \pi - \angle AOB = 2\angle BAO \\ \angle COP &= \pi - \angle COA = 2\angle CAO\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \angle BOC &= \angle BOP - \angle COP = 2(\angle BAO - \angle CAO) = 2 \\ &= 2\angle BAC = 2\beta.\end{aligned}$$

Spezialfall: Thales' Satz





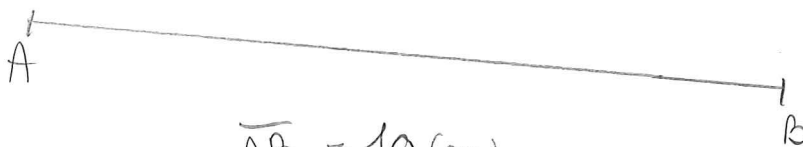
Sirkulær firkant:

Motstående vinkler
er komplementære
(sum = π)

Sirkulær mangekant: Hjørner på en sirkel

Introduksjon av lengder av linjestykker

Bestemme oss for
en positiv retning



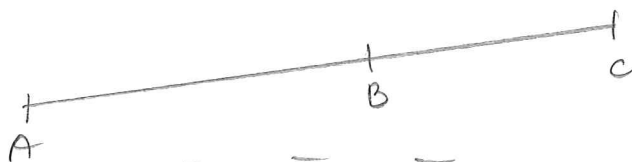
$$\overline{AB} = 10 \text{ (cm)}$$

$$\overline{BA} = -10 \text{ (cm)}$$

$$AB = 10 = |\overline{AB}| = |\overline{BA}|$$

$$\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA} = 0.$$

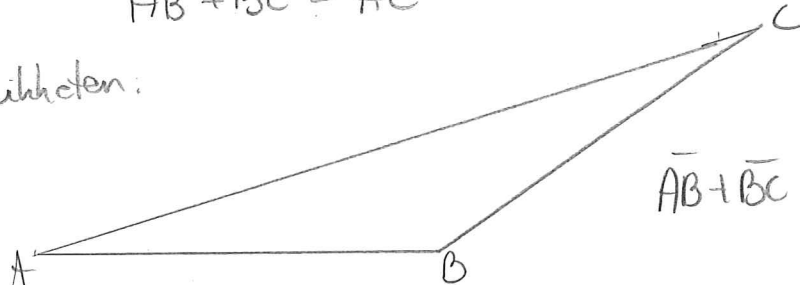
Kolineære punkter:



$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

Ulikhet:
[Colineantet]

Trekantulikheten:



$$\overline{AB} + \overline{BC} \geq \overline{AC}$$